Retour à l'applet

Oscillations d'un fil pesant

On considère un fil pesant de longueur L suspendu par une extrémité. Au repos ce fil pend selon la verticale du point de suspension.
En pratique, on utilise une chaîne dont les maillons sont très petits.
On écarte un peu le fil de sa position initiale et on le laisse osciller librement. On se limite aux mouvements de faible amplitudes dans un plan et on néglige les frottements.
Dans le plan de vibration on prend les axes Ox vertical et Oy horizontal.
Soit µ la masse du fil par unité de longueur.
On considère deux points très proches M et N du fil.
La force de rappel qui agit sur ce segment est la projection sur Oy de l'accroissement de la tension T du fil entre M et N.

Pour l'unité de longueur, cette force est : $f = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

En M, la tension est T = µgx.

$$f = \mu g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \mu g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

Pour l'unité de longueur, la force d'inertie est : $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

L'équation du mouvement est $\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Si on se limite aux solutions y = Z(x).cos(ωt) sinusoïdales du temps l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\omega^2}{g}\frac{Z}{x} = 0$$

La solution de l'équation est :

$$Y(x) = AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right) + BY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)$$

J0(u) et Y0(u) sont les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre 0.

<u>Conditions aux limites :</u>
Pour x = 0 la solution doit être finie. Comme $Y_0(0) = -\infty$, la solution est de la forme :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t).J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)$$

Pour x = L y est nul.

Donc $2\omega\sqrt{\frac{L}{g}}$ est une racine de $J_0(u) = 0$.

Si a_n est un zéro de la fonction de Bessel alors $\omega_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}a_n$ est une pulsation propre du système.

On détermine les zéros de la fonction $J_0(u)$ par une méthode numérique (dichotomie, sécante …)