Retour à l’applet

Pendule elliptique

On considère un pendule pesant mobile sans frottements autour d'un axe horizontal A porté par un chariot de masse négligeable qui se déplace sans frottements sur des rails horizontaux et normaux à l'axe de rotation. Avec ses hypothèses simplificatrices, G centre de gravité du pendule est aussi le centre de gravité de l'ensemble. La masse du pendule est M et J_G est le moment d'inertie du système par rapport à un axe horizontal passant par G. On pose AG = a.

Soient x l’abscisse du point G et θ l’angle entre AG et la verticale.

L’ordonnée y de G est donc y = a.cosθ

A l'instant initial t_0, A est situé à l'origine, on écarte G de la distance e de l'origine et on abandonne le système sans vitesse initiale.

<u>Conservation de la quantité de mouvement sur l’axe Ox :</u>
En l’absence de frottements, la réaction des rails est verticale ainsi que le poids Mg du pendule. Donc sur l’axe Ox on a : Mv = Mx’ = Cte.
Avec les conditions initiales retenues (x’ = 0, x_0 = e), on tire x’ = 0 = Cte et x = e
Le centre de gravité G se déplace sur la verticale d’abscisse e.
Comme par hypothèse A est obliger de se déplacer sur l’axe horizontal Ox chaque point du pendule décrit pendant le mouvement une portion d'ellipse d'où le nom de ce type de pendule.

<u>Conservation de l’énergie :</u>
Energie cinétique initiale : Ec = 0.
Energie potentielle initiale : -Mgacosθ_0
Energie cinétique : $Ec = \frac{1}{2}M\left(x'^2 + y'^2\right) + \frac{1}{2}J_G.\theta'^2 = \frac{1}{2}Mx'^2 + \frac{1}{2}\left(J_G + Ma^2\sin^2\theta\right)\theta'^2$.
En effet y = a.cosθ et donc y’ = -a.θ’.sinθ.
Comme x’ = 0, on a donc : $\left(J_G + Ma^2\sin^2\theta\right)\theta'^2 = 2M.g.a(\cos\theta - \cos\theta_0)$ (a)

Remarque :

> Si l’on considère le moment d’inertie J par rapport à l’axe passant par A, on a :
> J = J_G + Ma^2. et $\left(J - Ma^2\cos^2\theta\right)\theta'^2 = 2M.g.a(\cos\theta - \cos\theta_0)$.
> Cette équation diffère de celle du pendule classique par l’apparition du terme –$Ma^2.\cos^2\theta$.

<u>Accélération angulaire :</u>
On dérive par rapport au temps l’équation (a)

$$2\theta'\theta''\left(J_G + Ma^2\sin^2\theta\right) + 2Ma^2\theta'^3\sin\theta\cos\theta = -2Mag\theta'\sin\theta$$

Soit : $\theta''\left(J_G + Ma^2\sin^2\theta\right) + 2Ma^2\theta'^2\sin\theta\cos\theta = -2Mag\sin\theta$

Si on se limite aux petits angles sinθ ≈ θ ,cosθ ≈ 1 et on néglige les termes d’ordre supérieur au premier l’équation précédente se limite à : $J_G.\theta'' + M.a.g = 0$.

Le mouvement est sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_G}{M.a.g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J - Ma^2}{M.a.g}}$

Cette période diffère de celle du pendule classique $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M.a.g}}$

Donc θ = θ_0.cosωt = cosωt.e/a. Et : e – x_A = a.sin θ ≈ aθ =e.cosωt

L’abscisse du point A est donnée par : x_A = e.(1 - cosωt)