8.4.7 Mathematische Formulierung der Beugung mit Hilfe der Fourier Transformation

Ein Raum, der den Beobachtungen bei der Beugung angepaßt ist, ist der Fourier-Raum. Man „betritt“ ihn durch die Fourier Transformation der Dichte im Ortsraum. Nennt man die Dichteverteilung im Raum $\rho(\vec{r})$, dann ist deren Fourier Transformierte:

$$F(\vec{h}) = \int_{Ortsraum} \rho(\vec{r}) \cdot e^{2\pi i \cdot \vec{r} \cdot \vec{h}} d\tau$$

Die Koordinate des Fourier-Raums ist der Vektor $\vec{h}$. In Anwendung auf die Beugung numeriert $\vec{h}$ die unterschiedlichen Ordnungen. Die beobachtete Intensität ist das Quadrat des Betrags von $F(\vec{h})$:

$$I(\vec{h}) = \left|F(\vec{h})\right|^2$$

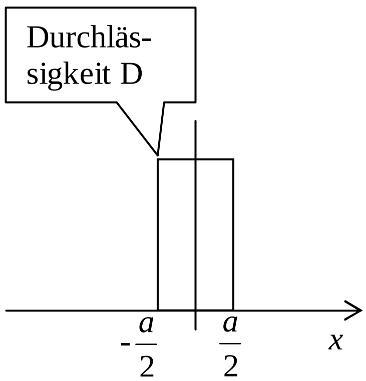
Umgekehrt kann aus den Fourierkomponenten $F(\vec{h})$ durch die Rück-Transformation die Dichte berechnet werden:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{Fourierraum} F(\vec{h}) \cdot e^{-2\pi i \cdot \vec{r} \cdot \vec{h}} d\tau_h$$

Die Bestimmung der Dichte entspricht der Bildrekonstruktion. Mathematisch werden die Wellen der unterschiedlichen Beugungsordnungen addiert. Die Linse führt diese Operation physikalisch aus. Sie lenkt die Wellen der unterschiedlichen Beugungsordnungen so um, daß sie sich auf einem Bildschirm oder auf unserer Netzhaut mit richtiger Phase überlagern, wodurch das Bild entsteht.

8.4.7.1 Der Spalt als Kastenfunktion

Ein Spalt wird als 1-dimensionale „Kastenfunktion“ modelliert. Dieses Beispiel, mit dem die Beugung am Spalt und Gitter beschrieben werden kann, sei hier explizit durchgerechnet:

$\rho(x) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } x < -\frac{a}{2} \\ A \text{ für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 \text{ für } x > \frac{a}{2} \end{Bmatrix}$		Mathematisches Modell für einen Spalt mit Breite a und „Durchlässigkeit“ D
$F(h) = \int_{Ortsraum} \rho(x) \cdot e^{2\pi i \cdot x \cdot h} dx$		Fourier Transformation der Dichte, entspricht der Integration der Dichte des Objekts über den Ortsraum

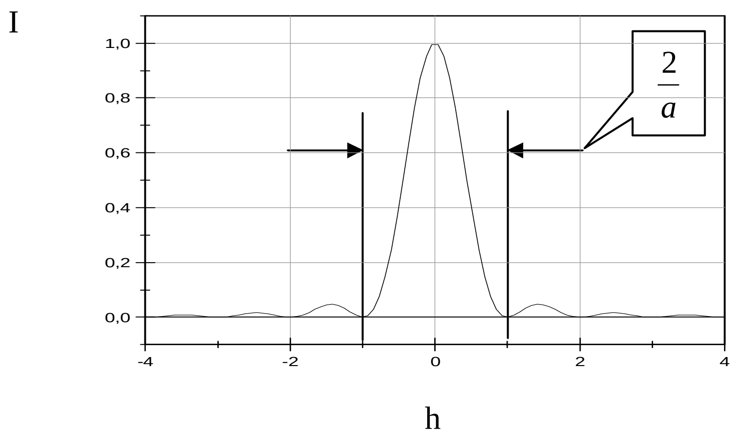
$$F(h)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\cdot e^{2\pi i\cdot x\cdot h}dx=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}D\cdot e^{2\pi i\cdot x\cdot h}dx$$	Aufteilung des Integrationswegs
$$F(h)=\frac{D}{2\pi i\cdot h}\left[e^{2\pi i\cdot x\cdot h}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}=\frac{D}{2\pi i\cdot h}\cdot\left[e^{2\pi i\cdot\frac{a}{2}\cdot h}-e^{-2\pi i\cdot\frac{a}{2}\cdot h}\right]=\frac{D\cdot\sin(\pi\cdot h\cdot a)}{\pi\cdot h}$$	Folgt mit Hilfe der Eulerschen Beziehung: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$
$$I(h)=\left[\frac{D\cdot\sin(\pi\cdot h\cdot a)}{\pi\cdot h}\right]^2$$	Die Intensität ist das Quadrat der Amplitude $F(h)$
$h=n\cdot\frac{1}{a}$, für n=...,-2, -1, 1, 2, ...	Nullstellen von $I(h)$
	Intensitätsverlauf $I(h)$ für $D=1,\ a=1$
Aus dem Vergleich der Argumente der Sinus Funktionen im Intensitätsverlauf der Fourier Transformation und aus dem Huygens-Fresnelschen Prinzip folgt:	
$$h=\frac{\sin\theta}{\lambda}$$	Beziehung zwischen der Koordinate h im Fourier-Raum und dem Beugungswinkel θ

Tabelle 1 Fourier-Transformation einer Kastenfunktion

Die Breite des zentralen Maximums kann man über die ersten Nullstellen zu dessen beiden Seiten abschätzen, sie erscheinen bei

$$h_0=\frac{1}{a}$$

Daraus folgt die wichtigste Eigenschaft von Beugungbildern:
Die Ausdehnungen im Beugungsbild sind reziprok zu denen des Objekts. Oder:
Was im *Ortsraum breit ist, wird im Fourier Raum schmal.*

8.4.8 Die Faltung

Zur Fourier Transformation von verschobenen oder wiederholten Objekten gibt es den Formalismus der *Faltung*, das Symbol dafür ist $\otimes$. Die Faltung erleichtert das Verständnis des Beugungsbilds solcher Objekte, weil sie das Beugungsbild in einen Anteil des einzelnen Objekts und einen zweiten Anteil zerlegt, der die Verschiebung oder Wiederholung des Objekts zum Ausdruck bringt. Grundlage dafür ist das „Fourier-Faltungstheorem“: *Die Fourier Transformation der Faltung ist das Produkt der Fourier Transformierten der Faktoren* :

$$\boxed{F(\rho(x)) = F(\rho_{Objekt}(x)) \cdot F(\delta(x - x_0))}$$

8.4.8.1 Verschiebung des Objekts

Die Verschiebung eines Objekts an einen Ort x_0 formuliert man mit Hilfe der *Faltung*. Sitzt das Objekt mit Dichte $\rho_{Objekt}(x)$ um den Punkt x_0 zentriert, dann gilt:

$$\rho(x) = \rho_{Objekt}(x) \otimes \delta(x - x_0)$$

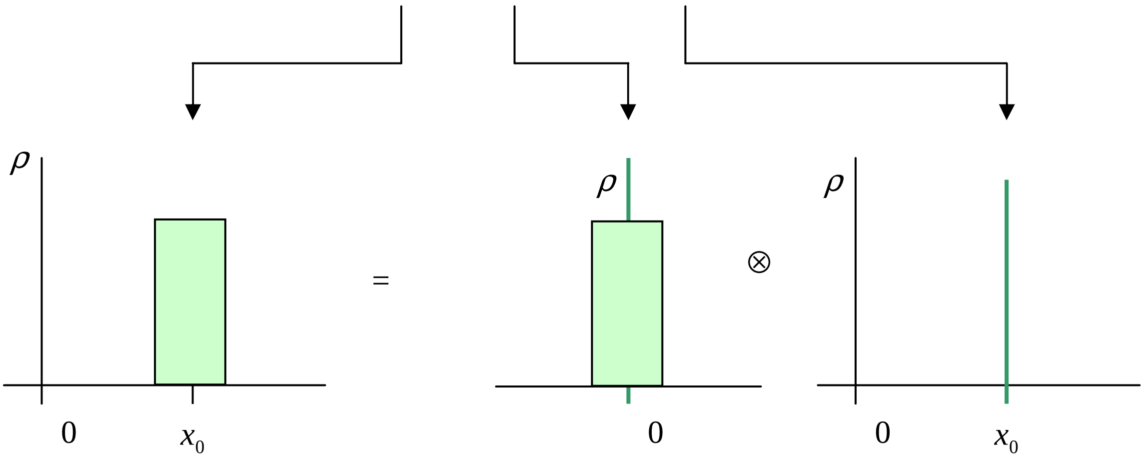


Abbildung 1 Eine Kastenfunktion am Ort x_0 dargestellt als Faltung einer Kastenfunktion am Koordinatenursprung mit einer Deltafunktion am Ort x_0.

Dieser Ausdruck enthält die Dichteverteilung $\rho_{Objekt}(x)$ des Objekts und eine Funktion, die anzeigt, wo das Objekt zu finden ist. Für letztere wählt man die δ-Funktion, eine mathematisch besonders angenehme Funktion, denn ihr Integral ist definiert als

$$f(x_0) = \int_{Ortsraum} \delta(x - x_0) \cdot f(x) \cdot dx$$

Mit anderen Worten: Jede noch so komplizierte Funktion ist integrierbar, wenn sie mit einer δ-Funktion multipliziert im Integranden steht, denn sie wird einfach abgeschrieben und ihr Argument x_0 gesetzt.

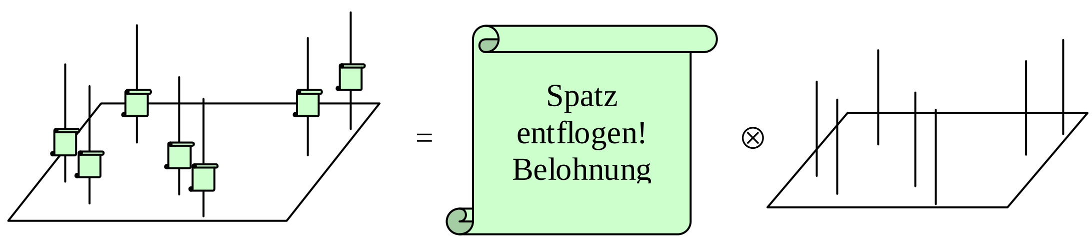
In der folgenden Tabelle wird die Intensität für eine nach x_0 verschobene Kastenfunktion berechnet.

$\rho(x) = \rho_{Objekt}(x) \otimes \delta(x - x_0)$		Faltung
$F(\rho_{Objekt}(x))$	$F(\delta(x - x_0))$	Fourier Transformation der beiden Faktoren der Faltung
$\int \rho_{Objekt}(x) \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot x} dx$	$\int \delta(x - x_0) \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot x} dx$	
$\frac{D \cdot \sin(\pi \cdot h \cdot a)}{\pi \cdot h}$	$e^{2\pi i h x_0}$	Die Fourier-Transformation ist ausgeführt, als Objekt wurde die Kastenfunktion gewählt
$F(\rho(x)) = \frac{D \cdot \sin(\pi \cdot h \cdot a)}{\pi \cdot h} \cdot e^{2\pi i h x_0}$		Theorem: Das Produkt beider Fourier-Transformierten ist die Fourier-Transformierte der Faltung
$I(h) = \lvert F(\rho(x)) \rvert^2 = \left\lvert \frac{D \cdot \sin(\pi \cdot h \cdot a)}{\pi \cdot h} \cdot e^{2\pi i h x_0} \right\rvert^2 = \left\lvert \frac{D \cdot \sin(\pi \cdot h \cdot a)}{\pi \cdot h} \right\rvert^2$		Die Intensität ist das Quadrat der Amplitude. Sie ist von der Objektverschiebung unabhängig, wie es der Beobachtung entspricht.

Tabelle 2 Berechnung der Intensität bei Verschiebung eines Objekts mit Hilfe der Faltung

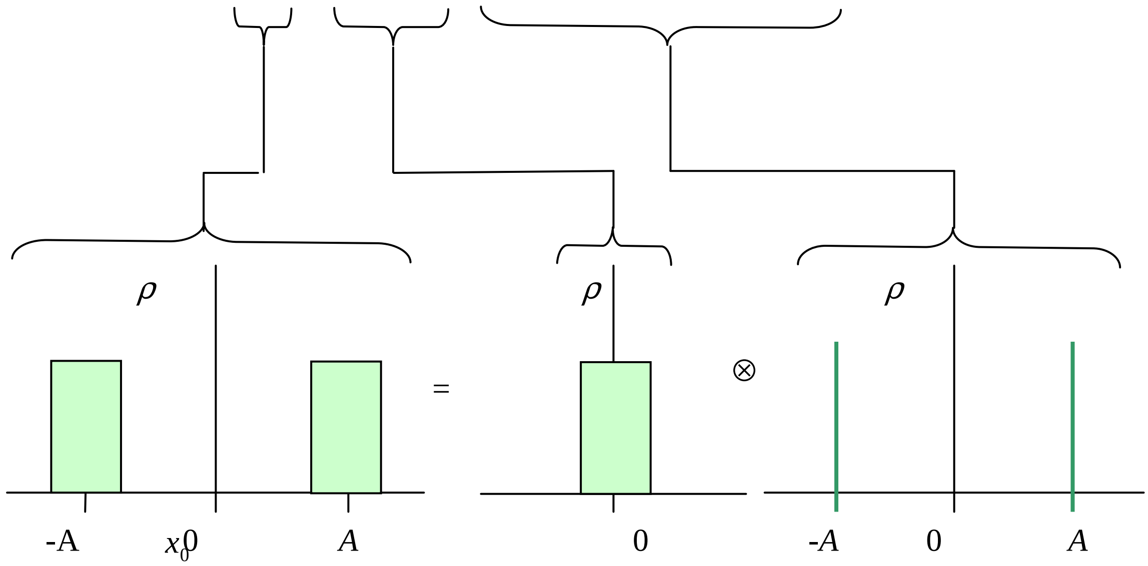
8.4.8.2 Periodisch wiederholte Objekte

Wiederholt sich das Objekt an mehreren Stellen, z. B. bei –A und A, dann wird mit der Summe der δ - Funktionen gefaltet. Jede einzelne von ihnen gibt einen Ort an, an dem das zu verteilende Objekt abgelegt wird. Ein alltägliches Beispiel zur Veranschaulichung der Faltung mit δ - Funktionen: Angenommen, ein zahmer Vogel sei entflogen, man habe einen entsprechenden Zettel verfaßt und vervielfältigt und diesen an alle Laternen-, Ampeln- und Telegrafenmasten der Umgebung geheftet. Die Verteilung der Zettel entspricht dann der Faltung der Masten mit dem Zettel. Jeder Masten steht für eine δ - Funktion und der Zettel für das Objekt:



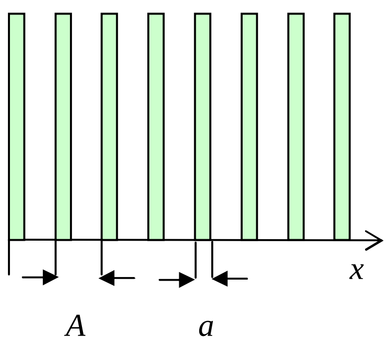
Analog werden zwei Kästen oder Spalte bei -A, A dargestellt:

$$\rho(x) = \rho_{Objekt}(x) \otimes \left(\delta(x+A) + \delta(x-A)\right)$$



Analog zur Formulierung des Doppelspalts wird ein Gitter mit N Spalten im Abstand von A als mit der entsprechenden Summe von δ-Funktionen angesetzt, letztere nennt man „Gitter-funktion“ Ein Gitter mit n Spalten im Abstand A ist die Faltung der Objektfunktion $\rho_{Objekt}(x)$ für einen einzelnen Spalt mit der „Gitterfunktion“:

$$\rho(x) = \rho_{Objekt}(x) \otimes \sum_{\nu=1}^{N} \delta(x - A\cdot\nu)$$

 $\rho(x) = \rho_{Objekt}(x) \otimes \sum_{\nu=0}^{N} \delta(x - A\cdot\nu)$		Faltung der Objektfunktion mit einer „Gitterfunktion“ für N Wiederholungen. Gezeichnet sind 8 Spalte mit Abstand A der 3 fachen Spaltbreite a, deren Durchläs-sigkeit sei D.
$F\left(\rho_{Objekt}(x)\right)$	$F\left(\sum_{\nu=0}^{N} \delta(x - A\cdot\nu)\right)$	Fourier Transformation der einzelnen Faltungs-Faktoren
$\int \rho_{Objekt}(x)\cdot e^{2\pi\cdot i\cdot x} dx$	$\int \sum_{\nu=0}^{N} \delta(x - A\cdot\nu)\cdot e^{2\pi\cdot i\cdot x} dx$	Aus der Definition der δ-Funktion folgt rechts
	$\sum_{\nu=0}^{N} e^{2\pi\cdot i\cdot A\cdot\nu\cdot h} = \frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(N+1)\cdot A\cdot h} - 1}{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot A\cdot h} - 1}$	die geometrische Reihe, nach Ausklammern von $e^{i\cdot\pi\cdot N\cdot h}$ erhält man

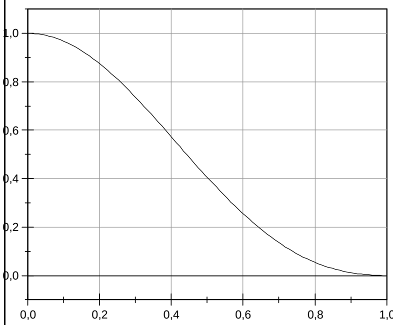
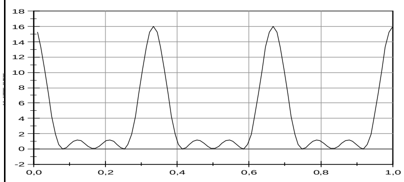
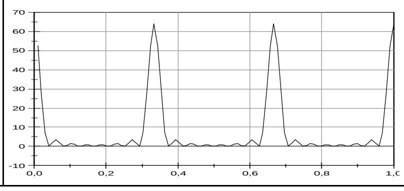
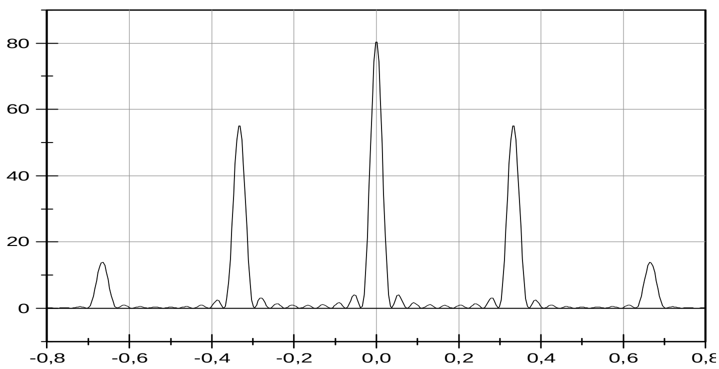
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$= \frac{e^{i\cdot\pi\cdot(N+1)\cdot A\cdot h}}{e^{i\cdot\pi\cdot A\cdot h}} \cdot \frac{e^{i\cdot\pi\cdot(N+1)\cdot A\cdot h} - e^{-i\cdot\pi\cdot(N+1)\cdot A\cdot h}}{e^{i\cdot\pi\cdot A\cdot h} - e^{-i\cdot\pi\cdot A\cdot h}}$</td><td>Mit Hilfe der Eulerschen Beziehung
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$
folgt</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{D \cdot \sin(\pi \cdot h \cdot a)}{\pi \cdot h}$</td><td>$e^{i\cdot\pi\cdot N\cdot A\cdot h} \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot (N+1) \cdot A \cdot h\right)}{\sin\left(\pi \cdot A \cdot h\right)}$</td><td>Fourier-Transformierte der Faltungs-Faktoren, als Objekt wurde die Kastenfunktion gewählt.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>
</td><td>Links: Intensität der Spaltfunktion, Breite a=1
Rechts: Quadrat der Fourier Transformierten der Gitterfunktion für:
Oben:4 Spalte, Abstand A=3
Unten:8 Spalte, Abstand A=3</td></tr>
<tr><td colspan="3">$F(h) = F(\rho_{Objekt}(r)) \cdot F(\sum_{\nu=1}^{N} \delta(x - a \cdot \nu)$
$I(h) = \left|F(h)\right|^2$</td><td>Berechnung der Amplitude aus dem Produkt der Fourier-Transformierten. Nach Betragsbildung und Quadrieren folgt die Intensität</td></tr>
<tr><td colspan="3">
h</td><td>Intensitätsverteilung eines Gitters mit 8 Spalten mit Abstand A=3, was der dreifachen Spaltbreite a=1 entspricht.</td></tr>
</table>

Tabelle 3 Intensitätsverteilung am Gitter. Mit wachsender Anzahl der Öffnungen werden die Linien schärfer, bleiben aber am gleichen Ort. Die Abnahme der Intensität zeigt den Verlauf der Intensität des Einzelspalts.