Vorlesung Experimentalphysik I am 2.11.1999 und 9.11.1999 J. Ihringer

1.4.2 Die Schwerkraft

Die Schwerkraft auf der Erde erhält man aus der allgemeinen Formulierung des Gravitationsgesetzes, wenn man eine der beiden Massen durch die Erdmasse ersetzt.

Formel	Wert	Einheit	Anmerkung
$F = G \cdot \frac{m_E \cdot m_s}{r_E^{\ 2}}$		N	Die Schwerkraft ist die Anziehungskraft zwischen der Erde und einem Körper an ihrer Oberfläche
G	$6{,}67259(85)\ 10^{-11}$	$\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$	Gravitationskonstante
m_E	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	kg	Schwere Masse der Erde
m_s		kg	Schwere Masse des Körpers an der Erdoberfläche
r_E	$6{,}360 \cdot 10^6$	m	Erdradius

Tabelle 1 Schwerkraft an der Erdoberfläche als Spezialfall des Gravitationsgesetzes

1.4.2.1 Äquivalenz von schwerer und träger Masse

Die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft ist eine Funktion einer Maßzahl des Körpers, die man als „schwere Masse“ m_s bezeichnet. Wird ein Körper durch eine Kraft beschleunigt, dann ist, nach dem 2. Newtonschen Gesetz, die Beschleunigung eine Funktion einer anderen Maßzahl des Körpers, die man als „träge Masse“ m_t bezeichnet. Die Beziehung beider Maßzahlen zueinander erkennt man, wenn man die Gravitationskraft zur Beschleunigung heranzieht. Genau das geschieht im Fallversuch.

Versuch 1 Fall in einem luftgefüllten und in einem evakuierten Rohr.

Druck im Rohr	Fallgeschwindigkeit	Erklärung
10^5 Pa	$v_{Feder} < v_{Kugel}$	Der Luftwiderstand bremst - unabhängig von der Masse- die Feder stärker als die Kugel
$<10^2$ Pa	$v_{Feder} = v_{Kugel}$	Offensichtlich gilt $\frac{m_s}{m_t} = const$

Der Fallversuch im evakuierten Rohr zeigt, daß Körper von beliebiger träger oder schwerer Masse gleich schnell fallen, wenn allein die Gravitationskraft auf sie wirkt. Offenbar werden im Gravitationsfeld alle Massen gleich beschleunigt. Weil beim Fall die Gravitationskraft gerade gleich der Trägheitskraft ist, ergibt sich daraus die folgende Beziehung zwischen schwerer und träger Masse:

Formel	Erklärung
$F = m_t \cdot a$	Trägheitskraft, um die Masse m_t mit a zu beschleunigen
$F = m_s \cdot \frac{m_E}{r^2} \cdot G$	Schwerkraft, die als Folge der Gravitation auf die Masse m_s wirkt
Beim freien Fall sind beide Kräfte gleich, bei Gleichsetzung der Kräfte folgt:	
$a = \frac{m_s}{m_t} \cdot \frac{m_E}{r^2} \cdot G$	Die Beschleunigung im Erdfeld hängt von $\frac{m_s}{m_t}$ ab
Das Fall-Experiment zeigt, daß die Beschleunigung im Erdfeld für alle Körper, unabhängig von ihrer trägen Masse m_t, dieselbe ist:	
$a = const \cdot \frac{m_E}{r^2} \cdot G$	Bedingung für gleiche Beschleunigung a für Körper mit beliebiger träger und schwerer Masse.
$\frac{m_s}{m_t} = const$	Folglich: Schwere und träge Masse sind proportional zueinander
$m_s = m_t = m$	Man wählt für die Konstante „1“ und bezeichnet sowohl die träge als auch die schwere Masse einfach als Masse mit dem Symbol m.

Tabelle 2 Äquivalenz der trägen und schweren Masse und Erdbeschleunigung: „Alle Körper fallen gleich schnell“

Träge und schwere Masse sind unterschiedlich Begriffe, beide sind aber proportional zueinander. In Praxis unterscheidet man nicht zwischen ihnen und bezeichnet beide einfach als „Masse“, was der Wahl $\frac{m_s}{m_t} = 1$ entspricht.

Es sei daran erinnert, daß man auch schon im Versuch mit der Luftkissenfahrbahn die Proportionalität von schwerer Masse μ des kleinen Körpers, der zur Beschleunigung diente (dessen träge Masse vernachlässigt wurde) und träger beschleunigter Masse M erkannte. Der Fallversuch zeigt die Proportionalität von schwerer und träger Masse besonders klar, weil sich schwere und träge Masse auf den gleichen Körper beziehen und nichts vernachlässigt wird.

1.4.2.2 Erdbeschleunigung, Bestimmung der Masse der Erde

Die genaue Messung der Erdbeschleunigung zeigt für Orte unterschiedlicher geographischer Breite unterschiedliche Werte, was mit der Annahme einer geringen Abweichung der Erdgestalt (Geoid) von der Kugelgestalt übereinstimmt.

Erdbeschleunigung	Ort	Wert	Dimension	Anmerkung
g	Pol	9,83	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Folge des unterschiedlichen Abstandes zum Erdmittelpunkt
	50^0	9,81		
	Äquator	9,78		

Tabelle 3 Erdbeschleunigung bei unterschiedlichen geographischen Breiten

Aus dem Cavendish Versuch ist die Gravitationskonstante unabhängig von der Erdmasse bekannt. Der Erdradius kann aus Messungen an der Erdoberfläche über den Umfang bestimmt werden. Die genaue Messung der Erdbeschleunigung erlaubt dann die Bestimmung der in Tabelle 1 angegeben Erdmasse:

Formel	Erläuterung
$F = m \cdot g$	Schwerkraft
$F = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r^2}$	Gravitationskraft
$m_E = \frac{g}{G} \cdot {r_E}^2$	Folgt aus der Gleichsetzung von Schwer- und der Gravitationskraft (s.u.): Bestimmung der Erdmasse bei bekannter Gravitationskonstanten und bekanntem Erdradius

Tabelle 4 Bestimmung der Erdmasse aus der Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche

Versuch 2 Messung der Erdbeschleunigung. Aus dem Weg- Zeitgesetz beim freien Fall wird g ermittelt.

$g = \frac{2s}{t^2}$	Beschleunigung als Funktion von Weg- und Zeit
$\Delta g = -\frac{4s}{t^3} \cdot \Delta t = 2 \cdot g \cdot \frac{\Delta t}{t}$	Fehlerfortpflanzung von der Zeitmessung bzw. Zeit- und Wegmessung auf die Gravitationskonstante mit Hilfe der Ableitung des Gravitationsgesetzes (vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Mathe.DOC - Delta_v)
$\Delta g = \sqrt{\left(2 \cdot g \cdot \frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(g \cdot \frac{\Delta s}{s}\right)^2}$	

Versuch #	s [m]	t [s]	g $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
Mittelwert			
Sigma			

Tabelle 5 Bestimmung der Erdbeschleunigung aus der Fallzeit bei Fallhöhe 1m

1.4.2.3 Erdbeschleunigung als Funktion der Höhe über der Erde

Für große Entfernungen von der Erde muß die Abnahme der Gravitationskraft bzw. der Erdbeschleunigung mit dem Gravitationsgesetz berechnet werden:

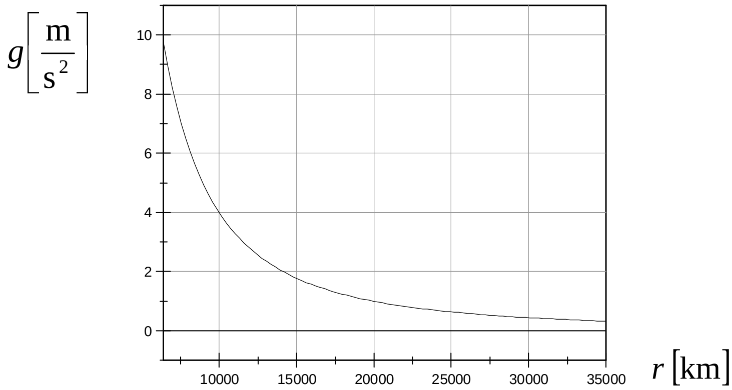
$g(r) = G \cdot \frac{m_E}{r^2}$	Aus der Gleichheit von Schwer- und Gravitationskraft folgt die Erdbeschleunigung als Funktion des Abstands 

Tabelle 6 Erdbeschleunigung als Funktion des Abstandes von der Erde

Bei kleinen Höhen über der Erde kann die Variation der Erdbeschleunigung mit Hilfe der Ableitung des Gravitationsgesetzes (vgl. Mathematische Begriffe und Hilfsmittel) abgeschätzt werden:

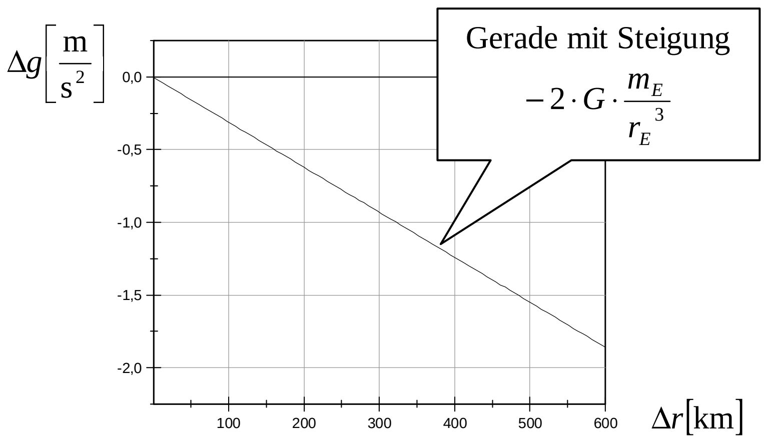
$\frac{dg}{dr}(r) = -2 \cdot G \cdot \frac{m_E}{r^3}$	Ableitung der Erdbeschleunigung nach dem Abstand
$\Delta y = \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \Delta x$	Mit Hilfe der Ableitung kann die Änderung Δy des Funktionswerts an der Stelle x_0 bei Änderung Δx des Arguments abgeschätzt werden (vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Mathe.DOC - Linearisierung)
$\Delta g = \frac{dg}{dr}(r_E) \cdot \Delta r$	Anwendung auf die Erdbeschleunigung
$\Delta g = -2 \cdot G \cdot \frac{m_E}{r_E^3} \cdot \Delta r$	
$\frac{\Delta g}{g} = -2 \cdot \frac{\Delta r}{r_E}$	Die Relative Änderung der Schwerkraft ist doppelt so groß und von entgegengesetztem Vorzeichen wie die des Abstandes der Massen

Tabelle 7 Variation der Erdbeschleunigung bei kleiner Variation des Erdradius

1.4.2.4 Die Fallgesetze

Die Fallgesetze beinhalten das Weg-Zeit Gesetz für beschleunigte geradlinige Bewegung unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung Letztere ist immer zum Erdmittelpunkt gerichtet.

Eine eindimensionale Formulierung genügt immer dann, wenn die Bahn der Bewegung geradlinig in Richtung oder Gegenrichtung der Schwerkraft verläuft. Bei einem Wurf nach oben ändert zwar die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen, die Bahn bleibt aber geradlinig.

Die Formulierung in zwei oder drei Dimensionen ist nötig, wenn der Körper zu Beginn der Bewegung eine Geschwindigkeit in beliebige Richtung zeigt. Es überlagern sich dann zwei Bewegungen: Die beim Start durch den Vektor der Geschwindigkeit gegebene mit der durch die Erdbeschleunigung verursachte. Legt man das Koordinatensystem in die Ebene der Bahn, dann genügt eine 2-dimensionale Darstellung (vgl. die Kreisbewegung, 1.2.1.2).

Funktionale Abhängigkeit	$f(t)$	$\dot{f}(t)$	$\ddot{f}(t)$
Begriff	Weg	Geschwindigkeit	Beschleunigung
Geradlinige Bahn in Richtung der Schwerkraft	$s(t)=\frac{g}{2}\cdot t^2+v_0\cdot t+s_0$	$v(t)=g\cdot t+v_0$	$a=g$
Beliebiger Wurf	$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} v_0^x\cdot t+s_0^x \\ -\frac{g}{2}\cdot t^2+v_0^y\cdot t+s_0^y \end{pmatrix}$	$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_0^x \\ -g\cdot t+v_0^y \end{pmatrix}$	$\vec{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

Tabelle 8 Weg Zeit Gesetz für den Wurf in 1 und 2 Dimensionen. Anfangswerte zur Zeit t=0: v_0 bzw. v_0^x, v_0^y Komponenten der Geschwindigkeit, s_0 bzw. s_0^x, s_0^y Komponenten des Ortes. Im 2-dimensionalen Koordinatensystem zeige die y-Achse nach oben.

Ist die „Wurfparabel“ als Funktion $y=f(x)$ erwünscht, dann wird im Ausdruck für die Bahnkurve der Parameter „Zeit“ eliminiert. Analog formuliert man die Geschwindigkeit:

Funktionale Abhängigkeit	Weg	Geschwindigkeit
Funktionen mit der Zeit als Parameter	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0^x\cdot t \\ -\frac{g}{2}\cdot t^2+v_0^y\cdot t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0^x \\ -g\cdot t+v_0^y \end{pmatrix}$
Substitution der Zeit	$t=\frac{x}{v_0^x}$	
Funktionen der *x*-Komponente der Bahn	$y=-\frac{g}{2\cdot(v_0^x)^2}\cdot x^2+\frac{v_0^y}{v_0^x}\cdot x$	$\dot{y}=-\frac{g}{v_0^x}\cdot x+v_0^y$

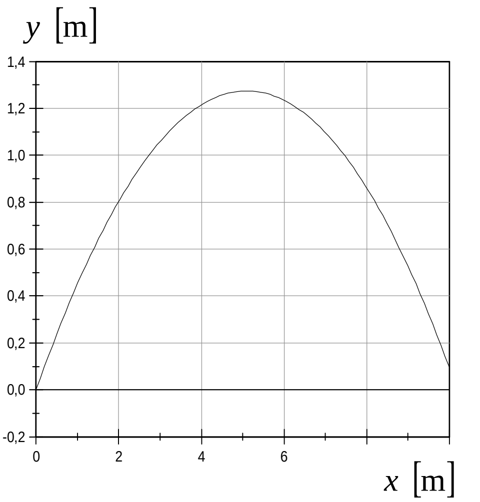
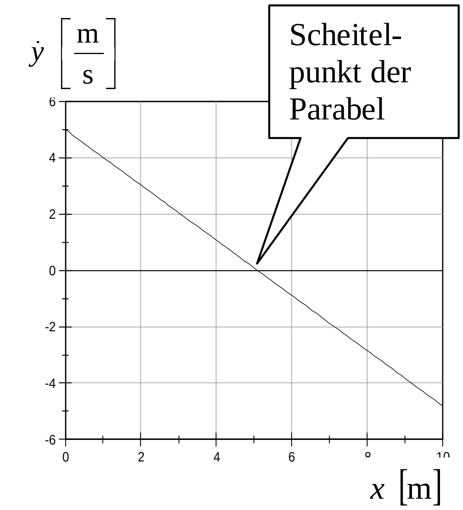
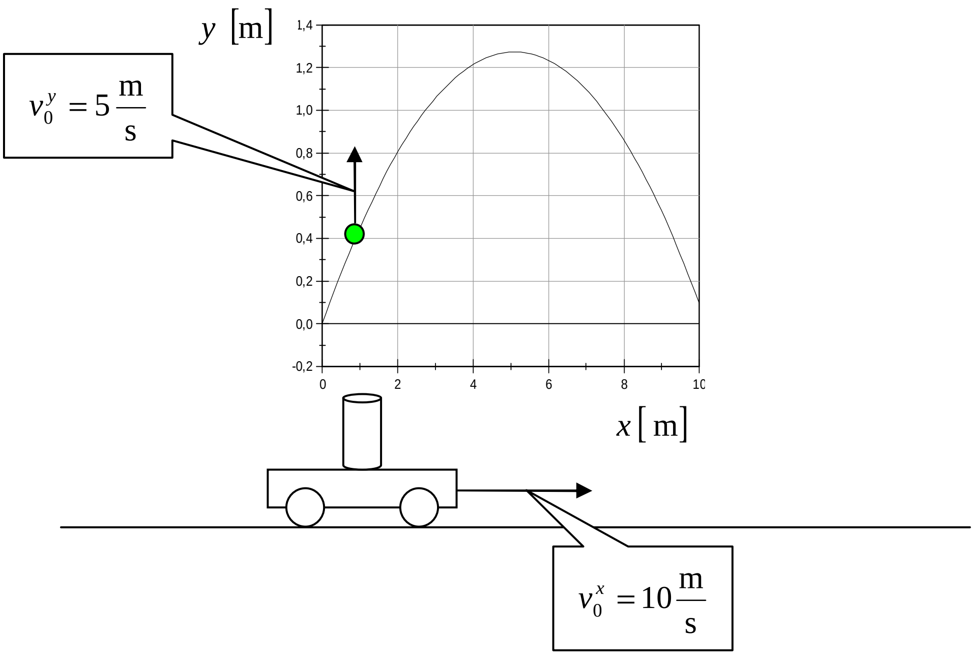
Bahn- und Geschwindigkeit als Funktion von x für $v_0^x = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $v_0^y = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$		

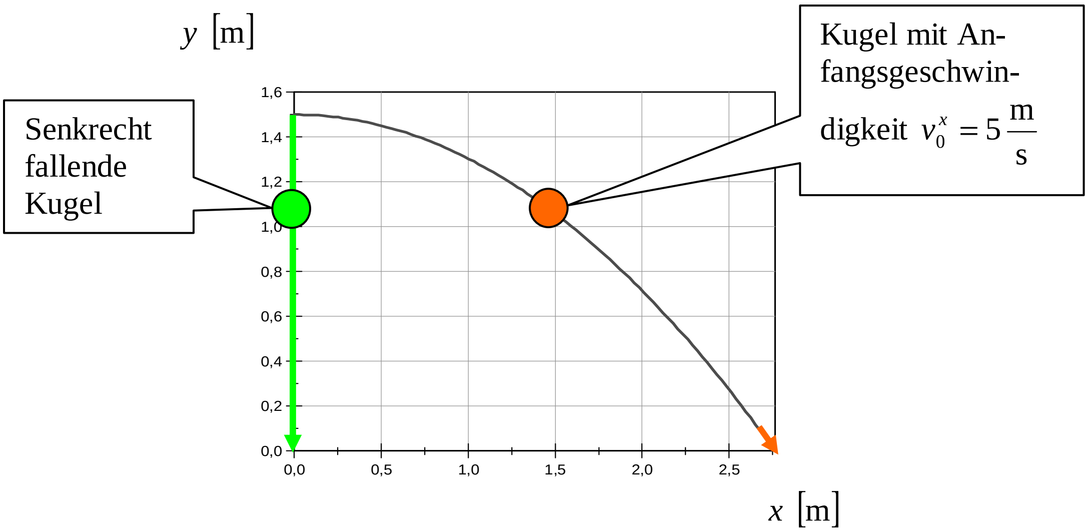
Tabelle 9 Die „Wurfparabel“: Höhe y und Geschwindigkeit in Richtung y als Funktion der x-Koordinate des Weges

Versuch 3 Geradlinige Bewegungen in zueinander senkrechten Richtungen überlagern sich ungestört. Aus einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug wird eine Kugel senkrecht nach oben geschossen, diese fällt auf ihren Startpunkt im Zug zurück, obwohl dieser an einer anderen Stelle angekommen ist.



Versuch 4 Ein weiterer Versuch zeigt, daß sich geradlinige Bewegungen ungestört überlagern: Zeitgleich läßt man eine Kugel senkrecht nach unten fallen und beschleunigt eine zweite waagrecht durch eine Feder auf $5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Beide treffen gleichzeitig am Boden auf, obwohl die zweite einen weiteren Weg zurückgelegt hat. Die Fallzeit aus Höhe* y *berechnet sich nach*

$$t = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$



Versuch 5 An einem Wasserstrahl wird die Parabelform für unterschiedliche Richtungen des „Wurfs“, d.h. der Anfangsgeschwindigkeit, gezeigt.

1.4.3 Die Keplerschen Gesetze

Johannes Kepler fand zur Beschreibung der Planetenbewegung drei Gesetze, wobei erstmals keine Kreisform der Bahnen vorausgesetzt wurde:

Erstes Keplersches Gesetz: „Jeder Planet bewegt sich in einer Ebene um die Sonne. Seine Bahn ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

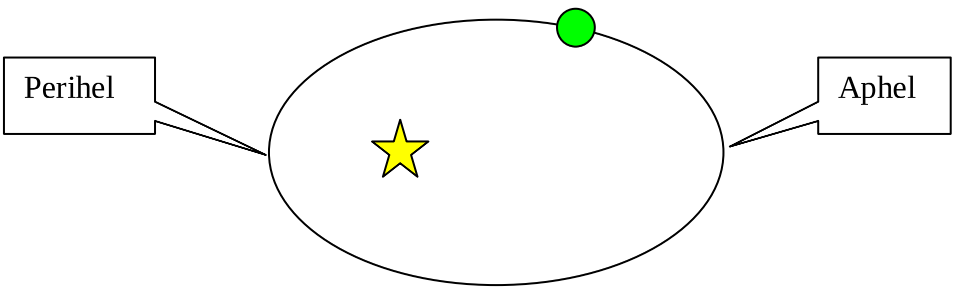


Abbildung 1 Ellipsenbahn der Planeten mit der Sonne in einem Brennpunkt. Sonnennächste und fernste Punkte werden als Perihel und Aphel bezeichnet.

Zweites Keplersches Gesetz: „Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen."

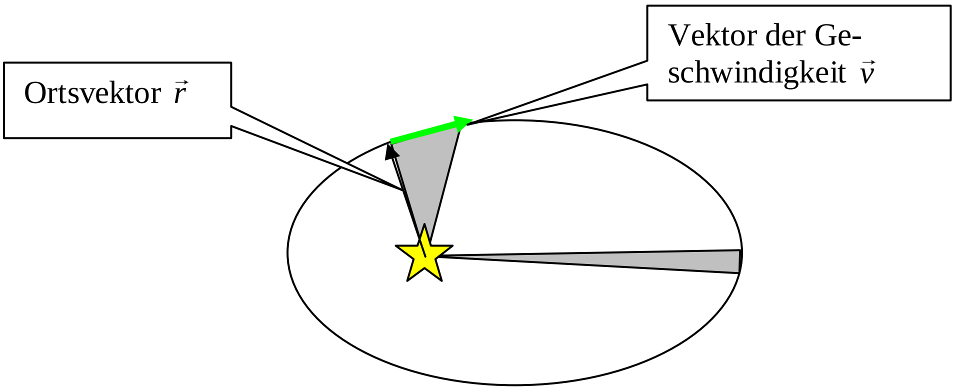


Abbildung 2 Planetenbahn mit den in einer Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichenen gleichen Flächen (schraffiert) für zwei Positionen.

Anmerkung: Mit der Definition des Vektorproduktes ist die vom Fahrstrahl, dem Ortsvektor, in einer Zeiteinheit überstrichene Fläche

$$A = \frac{1}{2} \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$

(vgl. . http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Mathe.DOC - Vektorprodukt)
Wird das in dieser Fläche enthaltene Vektorprodukt mit der Masse m des Körpers multipliziert, so erhält man den *Drehimpuls* des Körpers. Der Drehimpuls $m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ ist, wie der *Impuls* und die *Energie* eines Systems, eine *Erhaltungsgröße*. Die Flächenkonstanz im zweiten Keplersche Gesetz zeigt also die allgemein gültige Drehimpulserhaltung für den Spezialfall der Bewegung auf Ellipsenbahnen. Genaueres zu Drehimpuls, Impuls, Energie und den Erhaltungssätzen folgt im weiteren Verlauf dieser Vorlesung.

Drittes Keplersches Gesetz: „Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen r_1 und r_2 der Bahnellipsen."

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}$$

Auch dieses Gesetz folgt aus der allgemein gültigen Energie- und Impulserhaltung.

Speziell für die Kreisbahn folgt dieses Gesetzes auch ohne die Energiebetrachtung, setzt man die Beschleunigung bei der Kreisbewegung gleich der Beschleunigung durch die Gravitation und beachtet, daß die Umlaufzeit T in der Kreisfrequenz ϖ enthalten ist:

Formel	Erläuterung
$a = G \cdot \frac{M_s}{r^2}$	Beschleunigung durch die Gravitation der Sonne
$a = \varpi^2 \cdot r$	Beschleunigung zum Zentrum der Kreisbahn (Zentrifugalbeschleunigung)
$G \cdot \frac{M_s}{r^2} = \varpi^2 \cdot r$	Beide Beschleunigungen sind gleich
$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{\varpi_2^2}{\varpi_1^2}$	Ergibt sich für zwei unterschiedliche Bahnen nach Division der Gleichungen
$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$	Mit $\varpi = \frac{2\pi}{T}$ erhält man schließlich das 3. Keplersche Gesetz

Tabelle 10 Drittes Keplersches Gesetz in Anwendung auf die Kreisbahn.

Versuch 6 Modell zum Gravitationspotential. Eine Kugel bewegt sich im Potential des Modells auf Ellipsenbahnen.

Aus der Gleichheit von Zentrifugal- und Gravitationsbeschleunigung folgt eine Beziehung zwischen der Masse M_Z des Körpers im Zentrum und der Umlaufzeit T eines umlaufenden Körpers. Man erkennt, daß die Umlaufzeit nur vom Abstand und der Masse des Zentralgestirns, aber nicht von der Masse des umlaufenden Körpers abhängt.

Formel	Erläuterung
$G \cdot \frac{M_z}{r^2} = \varpi^2 \cdot r$	Gravitationbeschleunigung = Zentrifugalbeschleunigung
$G \cdot \frac{M_z}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$	folgt mit $\varpi = \frac{2\pi}{T}$
$T = 2\pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{r}{G \cdot M_z}}$	Periode des Umlaufs eines Körpers als Funktion der Masse des Zentralgestirns und des Abstands
$M_Z = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$	Die Masse des Zentralkörpers kann aus Abstand und Umlaufzeit irgendeines seiner Satelliten bestimmt werden

*Tabelle 11 Für Kreisbahnen gilt: Zusammenhang zwischen der Periode T, dem Abstand r vom Zentralkörper zum umlaufenden Körper und der Masse M_Z. Für die Sonne folgt mit der Periode der Erde T=365*24*3600* s *und dem Abstand r=1,496* 10^{11} m *die Masse der Sonne zu* $M_Z = 2 \cdot 10^{30}$ kg

Die folgende Abbildung zeigt die Umlaufzeit z.B. eines Satelliten um die Erde als Funktion seiner Höhe über der Erdoberfläche. Unmittelbar an der Oberfläche beträgt die Umlaufzeit 84 Minuten. „Geostationär“ nennt man Bahnen mit $24\ \text{h}$ Umlaufzeit, diese erfordern eine Höhe von $35800\ \text{km}$.

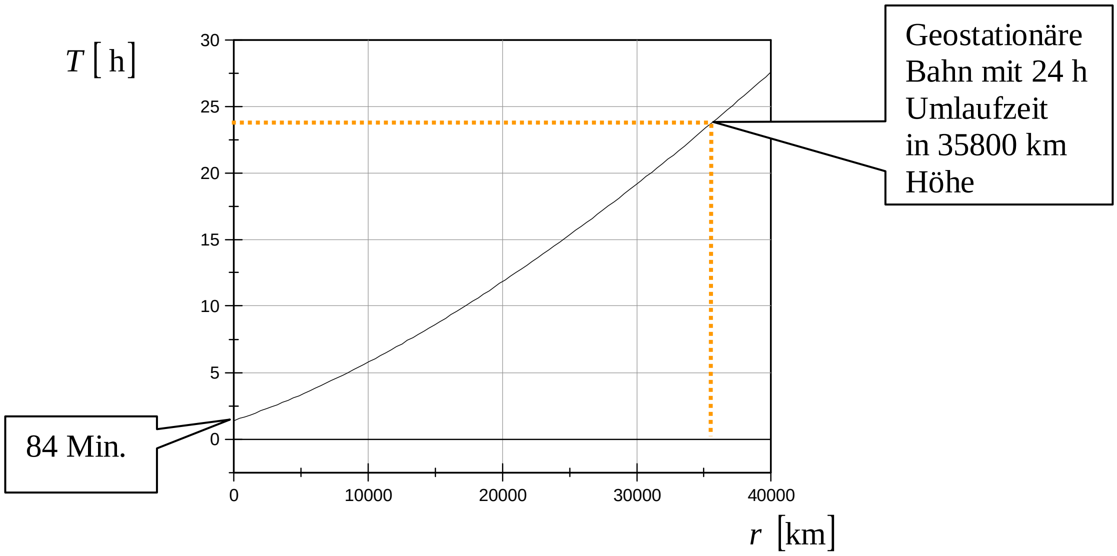


Abbildung 3 Umlaufzeit um die Erde für einen Körper, z.B. einen Satelliten, auf einer Kreisbahn als Funktion seiner Höhe über der Erdoberfläche in Kilometern

1.5 Harmonische Schwingungen, Federkraft, Reibung

1.5.1 Definition der harmonischen Schwingung

Die harmonische Schwingung bezeichnet die Bewegungsform einer kartesischen Komponente eines Punktes, der sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt. Die Zeit Verhalten der Komponenten in einem kartesischen Koordinatensystem wurde schon bei der Kreisbewegung (1.2.1.2) eingeführt. Neu ist hier lediglich, daß noch die Phase φ_0 berücksichtigt wird, die den Startwinkel zur Zeit $t = 0$ vorgibt.

Formel	Erläuterung
$y(t) = a_0 \cdot \sin(\varpi t + \varphi_0)$	Harmonische Schwingung
t	Zeit
a_0	Amplitude der Schwingung
$\varpi = \frac{2\pi}{T}$	Winkelgeschwindigkeit ϖ und Periode T
φ_0	Phase

Tabelle 12 Die harmonische Schwingung und ihre Variablen

Die Verwandtschaft der harmonischen Schwingung mit der Bewegung eines Punktes auf der Kreisbahn ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Die Amplitude a_0 der oben definierten Schwingung entspricht dem Radius r der Kreisbahn.
(vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V1_2Kinematik.DOC - Kreisbahn)

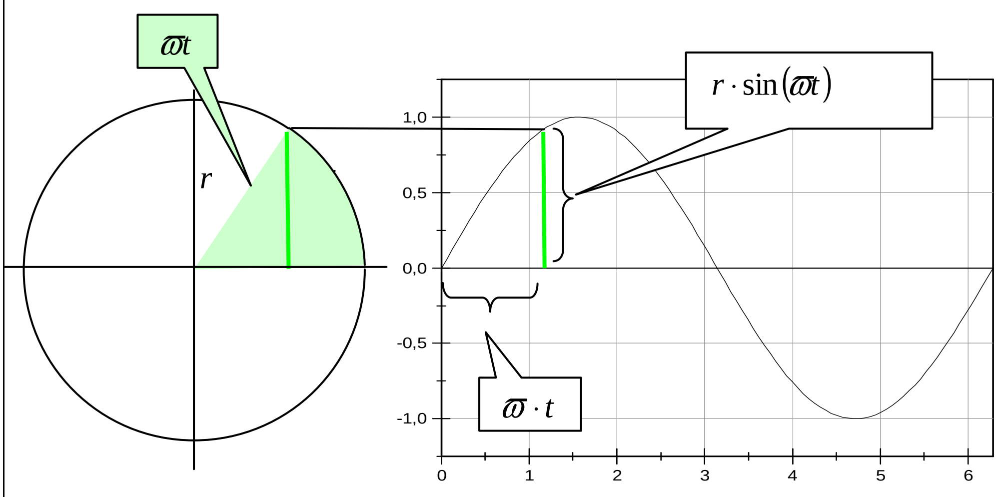
<table>
<tr><td></td><td>Weg</td><td>Geschwindigkeit</td><td>Beschleunigung</td></tr>
<tr><td>Kreisbahn, ϖ =const</td><td>$\vec{s} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varpi t \\ \sin \varpi t \end{pmatrix}$</td><td>$\vec{v} = r \cdot \varpi \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varpi t \\ \cos \varpi t \end{pmatrix}$</td><td>$\vec{a} = -r \cdot \varpi^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varpi t \\ \sin \varpi t \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Als harmonische Schwingung bezeichnet man das Zeit - Verhalten einer dieser Komponenten, z. B. das der y Komponente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">y Komponente</td><td>Weg</td><td>Geschwindigkeit</td><td>Beschleunigung</td></tr>
<tr><td>$y = r \cdot \sin(\varpi t)$</td><td>$\dot{y} = r \cdot \varpi \cdot \cos(\varpi t)$</td><td>$\ddot{y} = -r \cdot \varpi^2 \cdot \sin(\varpi t)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabelle 13 Bewegung eines Punktes auf der Kreisbahn und Zeit - Verhalten der kartesischen y-Komponente, der „harmonischen Schwingung“.

Versuch 7 Projektion der y-Komponente eines Punktes bei der Kreisbewegung und Bewegung der Projektion entlang der Zeit Achse mit Hilfe eines Drehspiegels

Versuch 8 Projektion der Schwingung einer Stimmgabel, die durch eine Geige angeregt wird. Man erkennt die Grund- und Oberschwingung

Zum zeitabhängigen Argument $\varpi \cdot t$ der Winkelfunktion kann noch ein konstanter „*Phasenwinkel*“ φ_0 addiert werden: Das Schaubild der sin-Funktion verschiebt sich bei positivem Phasenwinkel auf der Abszisse nach links, bei negativem Phasenwinkel nach rechts.

1.5.2 Die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

Besondere Bedeutung hat die harmonische Schwingung als Lösung der Bewegungsgleichung, die man erhält, wenn eine physikalische Größe proportional zum negativen Wert ihrer zweiten zeitlichen Ableitung ist. Das ist in der Mechanik immer dann der Fall, wenn auf einen Körper eine zum Weg $x(t)$ proportionale Kraft beschleunigend wirkt. Die Trägheitskraft ist stets proportional zu $\ddot{x}(t)$ und entgegen der beschleunigenden Kraft gerichtet.
(vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Mathe.DOC - DGL_2)

Formel	Erläuterung
$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$	Bewegungsgleichung des „harmonischen Oszillators“
$x(t) = a_0 \cdot \sin \varpi t$	Lösung der Gleichung: Die „harmonische Schwingung“
Mit diesem Lösungsansatz ergibt sich:	
$\ddot{x}(t) = -a_0 \cdot \varpi^2 \cdot \sin \varpi t$	Zweite Ableitung der Funktion
$m \cdot \varpi^2 = k$	$x(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in die Bewegungsgleichung eingesetzt
Es folgen die Koeffizienten der Lösung:	
$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Winkelgeschwindigkeit der Schwingung, T ist deren Periode
a_0	Amplitude, jeder Wert erfüllt die Bewegungsgleichung

Tabelle 14 Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators und ihre Lösung, die harmonische Schwingung, ihre Winkelgeschwindigkeit und ihre Amplitude

Die Winkelgeschwindigkeit ist nur durch die Größen der Bewegungsgleichung bestimmt, sie ist unabhängig von der Amplitude. Die Amplitude ist frei wählbar, sie ist konstant und behält deshalb ihren Wert der maximalen Auslenkung bei Beginn der Schwingung („Anfangswert“) bei.

1.5.2.1 Das Federpendel

Ein mechanisches System, das die Anforderungen der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators erfüllt, ist ein frei beweglicher Massenpunkt an einer Feder. Die Koeffizienten der Bewegungsgleichung sind wie folgt den mechanischen Größen zugeordnet:

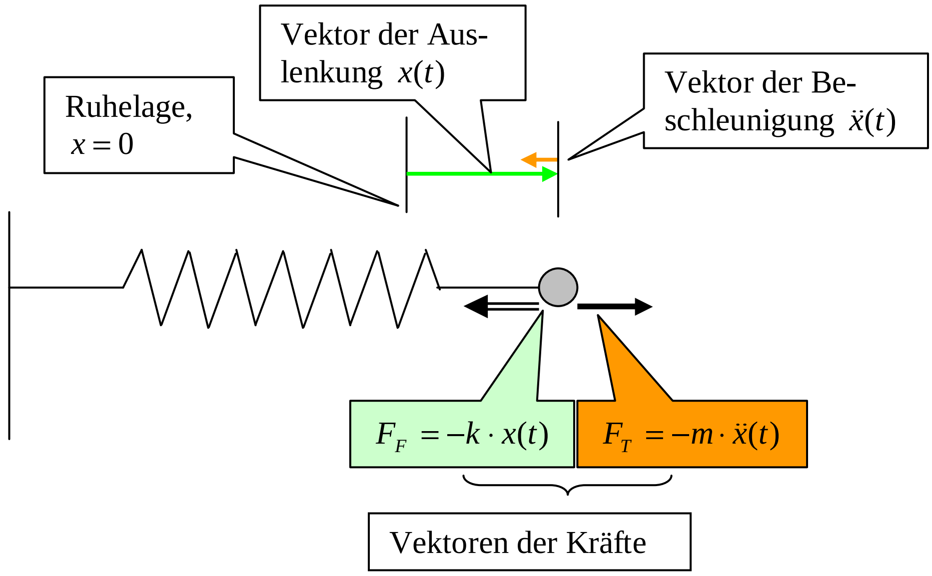


Abbildung 4 Schema des Federpendels. Grün: Kraft durch die Feder, rot: Trägheitskraft

Formel	Erläuterung
$F_T = -m \cdot \ddot{x}$	Trägheitskraft
$F_F = -k \cdot x$	Die Federkraft erfülle das Hookesche Gesetz, sie ist der Trägheitskraft entgegengerichtet. k ist die Federkonstante.
$F_T + F_F = 0$	Die Summe aus Trägheitskraft und Federkraft ist null: Gleichgewicht
$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$	Bewegungsgleichung
$x(t) = a_0 \cdot \sin \varpi t$	Lösung der Bewegungsgleichung: Die „harmonische Schwingung“
Koeffizienten der Lösung:	
$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Winkelgeschwindigkeit
$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$	Periode der Schwingung: Lange Schwingungsdauer für schwere Körper und weiche Federn

Tabelle 15 Harmonische Schwingung beim Federpendel

Versuch 9 Überprüfung des Hookeschen Gesetzes an der Feder, die im nächsten Versuch zum Antrieb des Pendels dient.

Versuch 10 Schwingung eines Federpendels. Ein nahezu reibungsfrei gelagerter Wagen ersetzt die im Schema oben gezeichnete Kugel. Es wird die Wirkung unterschiedlicher Massen auf die Periode überprüft

Versuch #	m [kg]	T [s]	$k = 4\pi^2 \cdot \frac{T^2}{m} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
	1		
	2		
	8		

Tabelle 16 17 Schwingungsdauer bei unterschiedlichen Massen

Versuch 11 Ein Federpendel wird mit unterschiedlichen Federkonstanten betrieben. Werden vier Federn hintereinander gehängt, dann beträgt die Federkonstante der gesamten Anordnung ¼ des Wertes für eine einzige Feder.

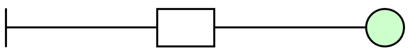
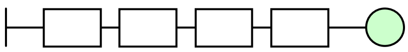
Versuch #	m [kg]	$k \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]	Aufbau:
	1	1		
	1	¼		

Tabelle 18 Schwingungsdauer bei unterschiedlichen Federkonstanten

Versuch 12 Zwei parallel aufgehängte, identische Pendel werden mit unterschiedlichen Amplituden angeregt. Man erkennt, daß die Schwingungsdauer von der Amplitude unabhängig ist.

1.5.2.2 Das mathematische Pendel

Für kleine Auslenkungen eines um eine Achse schwingenden Pendels erfüllt die Komponente der Schwerkraft senkrecht zur Aufhängung die Eigenschaften des Hookeschen Gesetzes.

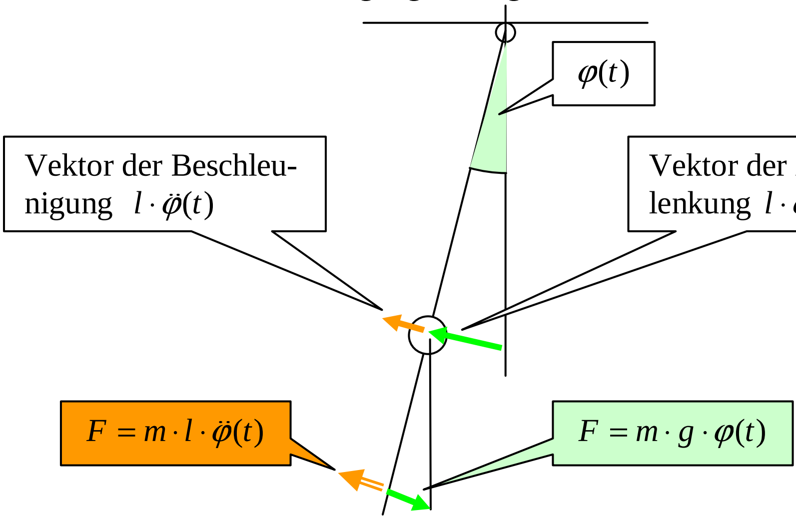


Abbildung 5 Schema des mathematischen Pendels. Grün: Auslenkung und antreibende Komponente der Schwerkraft, rot: Beschleunigung und Trägheitskraft.

Das Hookesche Gesetz gilt allerdings nur, solange die Näherung für die Schwerkraftkomponente senkrecht zur Bahn

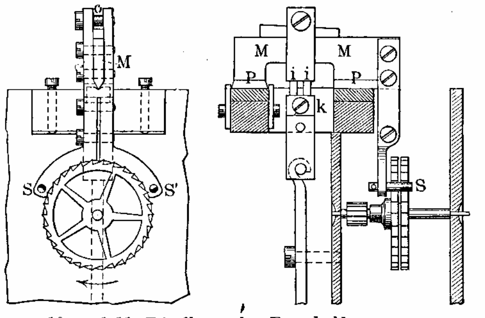
$$m \cdot g \cdot \sin \varphi(t) \approx m \cdot g \cdot \varphi(t)$$

gerechtfertigt erscheint. Unter dieser Voraussetzung erhält man analog zum Federpendel die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Das Zeitverhalten des Winkels des Pendels zur Vertikalen folgt der harmonischen Schwingung. Zur Würdigung des Pendels bedenke man, daß über viele Jahrhunderte die Periode seiner Schwingung den Takt der mechanischen Uhren bestimmte.

Formel	Erläuterung
$F = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}$	Trägheitskraft
$F = -m \cdot g \cdot \varphi$	Die Schwerkraftkomponente senkrecht zur Aufhängung erfülle das Hookesche Gesetz, sie ist der Trägheitskraft entgegengerichtet.
$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \varphi$	Die Kräfte sind zu jeder Zeit gleich
$\varphi(t) = a_0 \cdot \sin \varpi t$	Lösung der Bewegungsgleichung: Die „harmonische Schwingung“
Koeffizienten der Lösung:	
$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$	Winkelgeschwindigkeit
$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$	Periode der Schwingung: Lange Schwingungsdauer für lange Pendel, sie ist, im Gegensatz zum Federpendel, unabhängig von der Masse

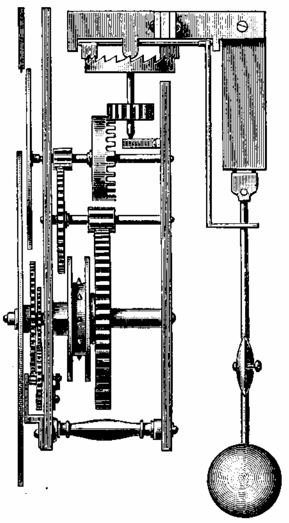
Tabelle 19 Bewegungsgleichung und Periode des mathematischen Pendels

ist aus *Fig. 8* ersichtlich, wo die Hälfte des Steigrades und der Anker nebst Paletten abgebildet ist. Derselbe umfaßt $6\frac{1}{2}$ Zähne des Steigrades. Die Ankerpaletten macht man aus ganz hartem Stahl oder aus Edelsteinen, Rubin, Saphir od. dgl. Dem Ankergang ähnlich ist der von Vulliamy erfundene **Stiftengang** *(Fig. 9)*, der in ältern Uhren häufig angewandt



10. und 11. Rieflersche Pendelhemmung.

wurde. Die beiden Arme des Ankers liegen ganz seitlich über dem am weitesten rechts liegenden Punkte des Steigrades, wodurch der Druck der Paletten auf das Steigrad immer in derselben Richtung wirkt. Auf dem Steigrade sind an Stelle der Zähne senkrecht zu seiner Ebene halbzylindrische Stäbe eingesetzt, zwischen die sich die Paletten des scherenförmig ausgebildeten Ankers schieben. Eine freie Hemmung ist **Rieflers Pendelhemmung** *(Fig. 10 und 11)*. Riefler benutzt die Biegung der Aufhängungsfeder des Pendels, um den Impuls auf den Pendel auszuüben, und läßt die Aufhängungsfeder bei jedem Durchgang des Pendels durch die Ruhelage etwas spannen. Dies geschieht dadurch, daß der Anker S S′ durch seine als Schneide ausgeführte Achse P P mit der Brücke M M fest verbunden ist, an der die Aufhängefeder i i k befestigt ist. Letztere wird nun bei jedem Durchschwung durch die Mitte, einmal nach links, einmal nach rechts, um einen kleinen Betrag gebogen und angespannt. Das Steigrad S ist ein Doppelrad und besteht aus einem Hebungsrad und einem etwas größern Ruherad. Bei dieser Anordnung schwingt also das Pendel vollkommen frei und unabhängig. Diese Hemmung hat in astronomischen Uhren der neuern Zeit vielfach Verwendung gefunden. Eine ähnliche freie Hemmung ist von Straßer angegeben.



12. Erste Pendeluhr von Christian Huygens 1656.

Schon vor Erfindung der Pendeluhr benutzten die Astronomen die Pendelschwingungen, um die Dauer einer Erscheinung zu bestimmen; als Regulator für Uhren wurde das **Pendel** erst 1656 von *Huygens* verwandt, der deshalb als Erfinder der Pendeluhr gilt. *Fig. 12* zeigt seine erste Pendeluhr. Er ließ das Steigrad horizontal laufen, und dieses warf die Lappen der horizontal liegenden Spindel hin und her. An dem Ende der Spindel hing das Pendel herab. Von großer Bedeutung ist die *Aufhängung* des Pendels. Huygens hing es an einem seidenen Faden, der beim Schwingen auf beiden Seiten gegen zykloidisch gekrümmte Bleche sich anlegte, um auf diese Weise die großen Schwingungen, die bei der Spindelhemmung erforderlich sind, isochron zu machen. Jetzt benutzt man bei der Ankerhemmung nur kleine Schwingungen und hängt das Pendel an zwei dünnen Stahlfedern i i (**Fig.** 4 u. 11) auf, deren Ebene senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels steht. Das *einfache Pendel* besteht aus einem Holz- oder Metallstab *(Pendelstab)*, der an seinem Ende ein schweres, meist linsenförmiges Metallstück *(Pendellinse)* trägt (Fig. 4). Die Schwingungsdauer t eines Pendels ist nach der Formel: $t = \pi\sqrt{\frac{e}{g}}$ abhängig von der *Pendellänge* l, der Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Pendels vom Drehungspunkt (vgl. *Pendel*). Man kann die Schwingungsdauer daher verkürzen oder vergrößern, je nachdem man die Pendellänge kleiner oder größer macht, was durch ein Hinauf- oder Hinunterschrauben der Pendellinse bewirkt wird, in kleinerm Betrag auch dadurch, daß man auf einem in der Mitte des Pendels angebrachten kleinen Teller Gewichte auflegt oder fortnimmt, wodurch der Schwerpunkt dem Aufhängungspunkt genähert oder von ihm entfernt wird. Ein Pendel, das Sekunden schwingt, ein *Sekundenpendel*, hat eine Länge von ungefähr 1 m, doch ist die genaue Länge an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschieden, da diese nach der obigen Formel von der Größe der Schwerkraft, der Beschleunigung g, abhängt. Am Äquator ist die Schwerkraft am kleinsten, dort beträgt die Länge des Sekundenpendels 991,03 mm, nach den Polen hin nimmt sie zu bis auf 996,10 mm, in Berlin beträgt sie 994,26 mm, und jede Änderung von 1 mm in der Pendellänge bringt eine tägliche Gangänderung von 43 Sekunden hervor. Da mit der Änderung der Temperatur auch die Länge des Pendelstabes eines einfachen Pendels sich ändert, so ist die Schwingungsdauer eines solchen Pendels sehr veränderlich, und daher können für bessere Pendeluhren, bei denen eine große Gleichförmigkeit des Ganges gefordert wird, einfache Pendel nicht verwandt werden. Wo man solche noch benutzt, macht man den Pendelstab aus trockenem und ganz mit Öl getränktem Holze, dessen Ausdehnung mit zunehmender Temperatur nur gering ist. Von dem Einfluß wechselnder Temperatur unabhängig ist nur die Pendellänge der *Kompensationspendel*, die unter Verbindung verschiedenartigen Materials so konstruiert sind, daß die mit dem Temperaturwechsel eintretenden Längenänderungen der verschiedenen Materialien sich gegenseitig aufheben, ‚kompensieren‘.

Abbildung 6 Pendeluhren. Quelle: Meyers Großes Konversationslexikon, 1908. In der Formel für die Dauer t einer Halbschwingung, der Zeit von einem Nulldurchgang bis zum nächsten, muß ein Druckfehler korrigiert werden: e ist durch l zu ersetzen.