Vorlesung Experimentalphysik I am 15. 11. und 16.11.1999 *J. Ihringer*

1.8 Energie

In den Naturwissenschaften sind Größen besonders wichtig, die während des Ablaufs irgendeines Vorgangs erhalten bleiben. Bei mechanischen Bewegungsabläufen sind diese „Erhaltungsgrößen“ *die Energie*, *der Impuls* und *der Drehimpuls* des Systems.

1.8.1 Arbeit und Leistung

Die Energie eines Systems erhöht sich, wenn an diesem System Arbeit verrichtet wird. Arbeit wird verrichtet, wenn auf einen Körper entlang eines Weges eine Kraft wirkt.

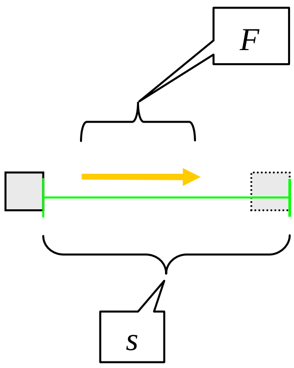
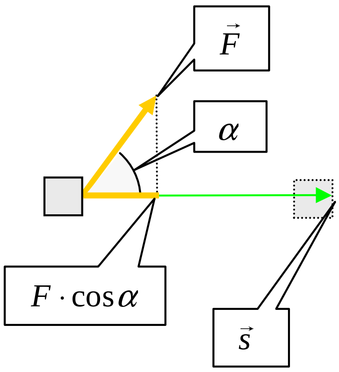
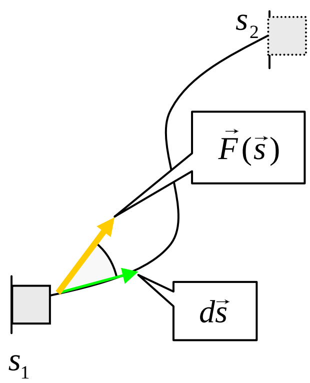
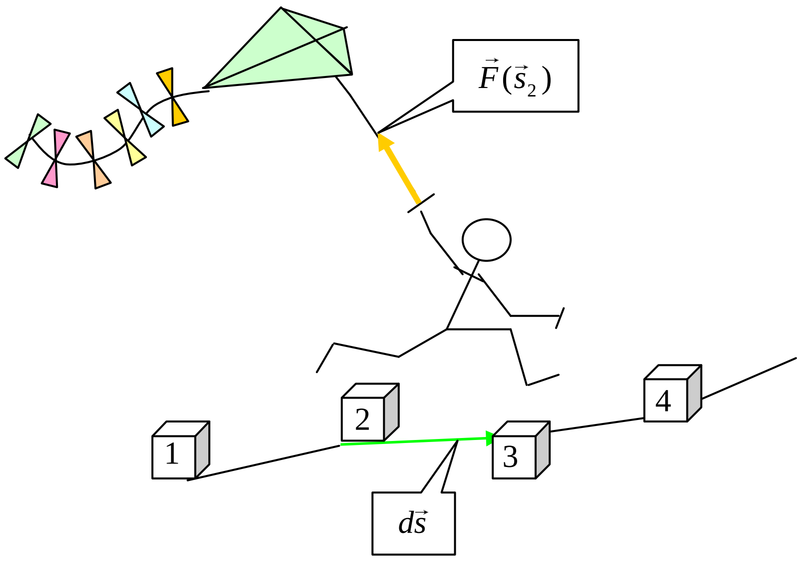
	Konstante Kraft F in Richtung des Weges s	Konstante Kraft im Winkel α zum Weg	Beliebiger Weg, beliebige Kraft
Arbeit:	$W = F \cdot s$	$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha$	$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, d\vec{s}$
			

Tabelle 1 Arbeit bei Wirkung einer Kraft (gelb) entlang eines Weges (grün)

Die Arbeit ist als Wegintegral über die Kraft definiert. Wirkt eine konstante Kraft in Richtung des Wegs, dann ist die Arbeit das Produkt aus Kraft mal Weg. Steht die Kraft in einem Winkel α zum Weg, dann wird nur die Komponente in Richtung des Weges mit dem geraden Wegstück multipliziert. Ein beliebiger Weg kann durch stückweise gerade Wege angenähert werden, deren einzelne Beiträge zur Arbeit werden dann summiert. Beim Grenzübergang zu beliebig kurzen Wegstücken wird diese Summe zu dem in der dritten Spalte der Tabelle gezeigten Wegintegral. Dieses Wegintegral zeigt eine symbolische Schreibweise: Die Ausführung der Integration ist vom jeweiligen Verlauf der Kraft- und des Weges abhängig.

Ein Beispiel: Die Arbeit, die man verrichtet, wenn man einen Drachen steigen läßt, errechnet sich als Wegintegral. Man rennt dabei in unterschiedlichen Richtungen, dadurch ist der Weg vorgegeben. Die variable Kraft entspricht der in Richtung und Zug ständig wechselnden Kräfte an der Schnur.



$$W = \sum_{\text{AlleWegstücke}} \vec{F}(\vec{s}_i) \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Weganfang}}^{\text{Wegende}} \vec{F}(\vec{s})\, d\vec{s}$$

Abbildung 1 Arbeit beim Drachensteigen. Die Kraft ist ortsabhängig.

1.8.2 Leistung

Die pro Zeit vollbrachte Arbeit ist die Leistung. Ist die Arbeit zeitlich konstant, dann ist die Leistung die Arbeit geteilt durch die Zeit. Variiert die Arbeit zeitlich, dann ist die Leistung die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

	Zeitlich konstante Arbeit	Zeitlich variable Arbeit
Leistung	$P = \frac{W}{t}$	$P = \frac{dW}{dt}$

Tabelle 2 Leistung

Größe	Funktionale Abhängigkeit	Formelzeichen	SI-Einheit	Zeichen	Beziehung
Kraft		F	Newton	N	
Weg		s	Meter	M	
Arbeit	$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s}$	W	Joule	J	$1\ \mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$
Leistung	$P = \frac{dW}{dt}$	P	Watt	W	$1\,\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$

Tabelle 3 Dimensionen von Arbeit und Leistung (Alte Einheit der Arbeit: 1 kWh=3,6 MJ, alte Einheit der Leistung: 1 PS=0,735 kW)

	Leistung		Anmerkung
Energiewirtschaft			
Mittlerer Leistungsbedarf in Deutschland	70 GW		
Niagarafälle	2.1 GW elektrisch genützt		3 GW mittlere Leistung des fallenden Wassers
Großes Kraftwerk, fossil oder KKW	1 GW		
Kraftwerk am Neckarwehr in Tübingen, Bismarkstraße	600 kW		~4 m Fallhöhe
Leistungs -Windmühle	700 kW		bei Windstärke 7
	150 kW		im Jahresmittel
Mensch			
Grundumsatz	1,2 W/kg Körpergewicht		1 kcal/h pro kg Körpergewicht
Dauer	100 W		
Spitze	1-4 kW		
Gehen	70 W		
Rein mechanische Leistung zur Überwindung von 140 m Höhenunterschied beim Gehen vom Bahnhof nach WHO (Studentendorf) in der Zeit:	30 Minuten	57 W	$P=\frac{m\cdot g\cdot h}{t}$
	40 Minuten	43 W	$P=\frac{75\cdot 9{,}81\cdot 140}{t}\left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2\cdot s}\right]$
Sprechen	10 μW		
Hörschwelle des Ohrs	0.1 fW=0,1 10^{-15} W		bei 1 kHz

Tabelle 4 Leistung in der Energiewirtschaft und beim Menschen

1.8.3 Kraftfelder

Ordnet man jedem Punkt des Raumes die dort zu einer bestimmten Zeit auf einen Massenpunkt wirkende Kraft zu, dann erhält man ein Kraftfeld. Ein Beispiel dafür ist die Schwerkraft, die an jedem Punkt des Raumes zur Erdmitte zeigt. Ein anderes Beispiel ist die Kraftverteilung beim oben angeführten Drachenflug.

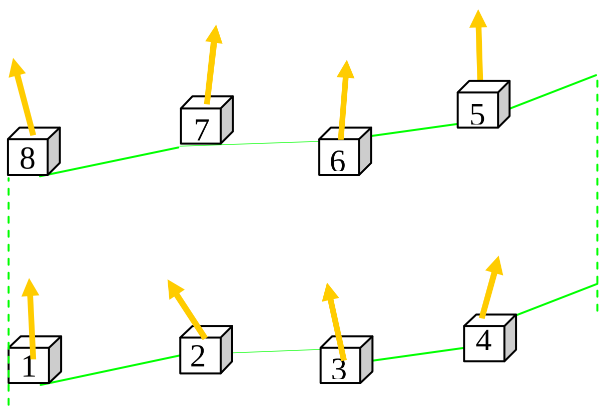


Abbildung 2 Beispiel für das Kraftfeld z. B. bei einer Momentaufnahme beim Drachenflug. Ein geschlossener Weg führt von Punkt 1 über 4, 5 bis 8 zurück nach 1.

1.8.3.1 Konservative und dissipative Kraftfelder

Wenn bei der Verschiebung eines Massenpunktes in einem Kraftfeld auf *einem geschlossenen Weg* die Arbeit verschwindet, dann ist das Kraftfeld *konservativ*, andernfalls *dissipativ*.

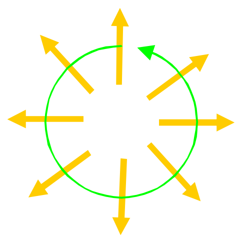
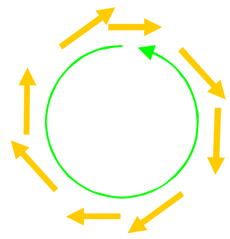
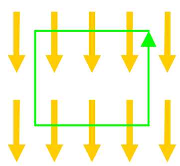
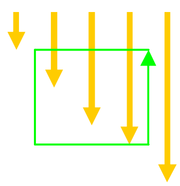
Art des Kraftfelds	Konservativ	Dissipativ
	Gravitationsfeld um einen Massenpunkt	Wirbelfeld, z. B. Reibungskräfte bei Bewegung auf einer Kreisbahn
Kraftfeld mit geschlossenem Weg:		
	Die Kraft steht immer senkrecht zum Weg: Es wird beim Umlauf keine Arbeit verrichtet.	Kraft und Weg sind immer entgegengerichtet: Es wird maximale Arbeit verrichtet
Ausschnitt aus den Kraftfeldern		
	Teilbereich des Gravitationsfelds, auf dem geschlossenen Weg wird links gewonnen, was rechts geleistet wird.	Reibungskräfte in einer laminar bewegten Flüssigkeit. Auf dem geschlossenen Weg ist rechts mehr Arbeit zu leisten als links gewonnen wird
Arbeit auf einem geschlossenen Weg	$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$	$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$
Arbeit zur Überführung einer Masse vom Betrag 1 zwischen zwei Punkten	Unabhängig vom Weg. Die Arbeit ist die Differenz zwischen zwei Eigenschaften der Punkte, die als deren *Potential* bezeichnet werden: $W = \varphi(2) - \varphi(1)$	Es gibt kein Potential, die Arbeit hängt vom Weg ab.

Tabelle 5 6 Konservative und dissipative Kraftfelder. Steht der Weg senkrecht zur Kraft, dann liefert das Wegstück keinen Beitrag zur Arbeit.

Wenn auf geschlossenen Wegen keine Arbeit zu leisten oder zu gewinnen ist, dann ist die Überführungsarbeit zwischen zwei Punkten unabhängig vom Weg. Ist die Arbeit wegunabhängig, dann kann man jeden Rundweg durch einen „unendlichen kleinen“ Weg ersetzen, d.h. man bleibt schließlich an Ort und Stelle. Im letzteren Fall wird offensichtlich keine Arbeit geleistet, also auch, wegen der Wegunabhängigkeit, auf allen anderen Wegen nicht. Je nach

Wahl des Rundwegs wird auf manchen Teilstücken Arbeit zu leisten sein, diese wird aber auf anderen wieder gewonnen.
Die Feldeigenschaften sind in geometrischen Konstruktionen nicht zu erkennen. Deshalb gab es immer wieder Versuche, geschlossene Wege zu ersinnen und durch Bilder zu belegen, wie z. B. im Schwerefeld der Erde mit einem „perpetuum mobile“ Energie gewonnen werden kann.

1.8.3.2 Das Potential

Weil im konservativen Kraftfeld die Überführungsarbeit zwischen zwei Punkten vom Weg unabhängig ist, kann sie als Differenz einer skalaren Eigenschaft der Punkte angegeben werden. Diese Eigenschaft heißt *das Potential* $\varphi(r)$ am Ort *r*: Es ist die Überführungsarbeit für eine Masse vom Betrag 1 aus unendlicher Entfernung zu dem Ort. Ein Potential $\varphi(r)$ gibt es nur in konservativen Feldern, es ist eine Eigenschaft der Orte in einem speziellen Kraftfeld, also eine *Feldeigenschaft*.

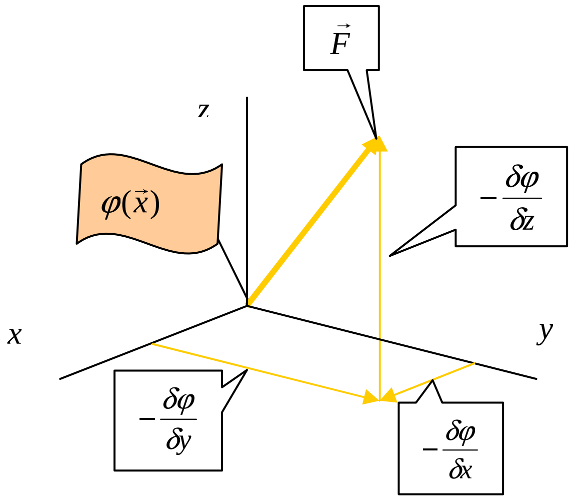


Abbildung 3 Potential und Kraft im konservativen Kraftfeld

Im funktionalen Verlauf des Potentials steckt die ganze Information über das Kraftfeld, weil die Kräfte die Ableitung der Potentiale nach den Komponenten des Ortsvektors sind.

Formel	Erläuterung
$\Delta\varphi = \varphi(2) - \varphi(1) = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Die Potentialdifferenz ist die Überführungsarbeit der Masse mit Betrag 1 zwischen zwei Punkten
$\vec{F}(\vec{x}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,\varphi(\vec{x})$	Die Kraft auf die Masse mit Betrag 1 ist die Ableitung des Potentials nach den Koordinaten des Raumes

Tabelle 7 Potential und Kraft in 3 Dimensionen

1.8.3.3 Die potentielle Energie

Gegenüber dem Potential ist die *potentielle Energie* $W_{Pot}(x)$ die Energie eins *Körpers* aufgrund seiner Lage unter dem Einfluss beliebiger Kräfte. Die Kräfte können Feldeigenschaften sein, wie z. B. die Gravitationskraft, oder nur lokal wirksam sein, wie z. B. die Rückstellkraft einer gespannten Feder. Die potentielle Energie ist die Überführungsarbeit zwischen zwei Punkten. $W_{Pot,x_1}(x_2)$ ist die von einem festen Punkt x_1 zum variablen Punkt x_2 geleistete Arbeit.

Energie	Kraft	Anmerkung
$W_{Pot} = -F \cdot \Delta x$	$F = -\frac{W_{Pot}}{\Delta x}$	Räumlich konstante Kraft
$W_{Pot,x_1}(x_2) = -\int_1^2 F(x) \cdot dx$	$F(x) = -\frac{dW_{Pot}(x)}{dx}$	Räumlich variable Kraft

Tabelle 8 Potentielle Energie und Kraft im 1-dimensionalem Raum

1.8.3.4 Das Potential des Schwerefeldes

Für einen Punkt im Gravitationsfeld im Abstand *r* vom Zentrum eines Massenpunktes M gibt das Potential die Überführungsarbeit von *r* nach ∞ an, für den letzteren Wert ist das Potential null. Es kann nicht vom Abstand „0“ aus berechnet werden, weil der Radius 0 im Nenner zu einer Singularität führen würde. In der Nähe der Erdoberfläche kann die Gravitationskraft als konstant angenommen werden.

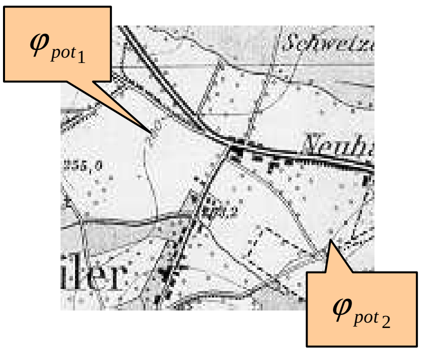
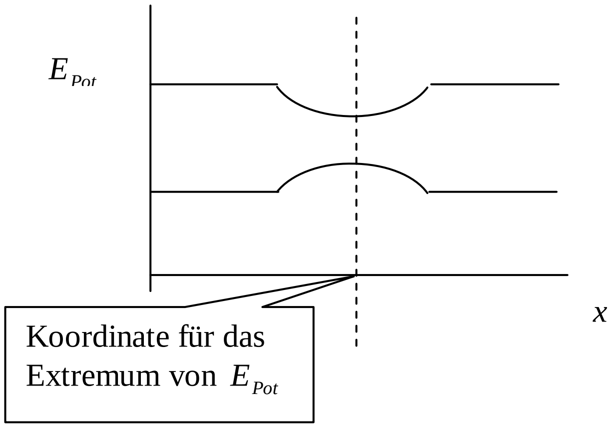
	Potential	Kraft auf die Masse mit Betrag 1
Gravitationsfeld	$\varphi(r) = -G \cdot \frac{M}{r}$	$F(r) = \frac{d\varphi}{dr} = G \cdot \frac{M}{r^2}$
Schwerefeld der Erde (Def.: Auf Meereshöhe, h=0, ist $\varphi = 0$)	$\varphi(h) = -g \cdot h$	$F(h) = g$
Potentielle Energie der Masse m in Höhe Δh gegenüber h_0	$W(\Delta h) = m \cdot (\varphi(h_0 + \Delta h) - \varphi(h_0)) = -\int_1^2 F \cdot ds = m \cdot g \cdot \Delta h$	
Auf Höhenlinien in Landkarten liegen Orte gleichen Schwere-Potentials		

Tabelle 9 Das Gravitationspotential an der Erdoberfläche. Zur Überführung einer Masse zwischen zwei beliebigen Orten auf der gleichen Höhenlinie wird keine Arbeit benötigt. Nur die Höhe h bestimmt das Potential.

Potentiale und ihre Gradienten sind in Landkarten mit Höhenlinien gut zu veranschaulichen. Orte auf gleicher Höhenlinie sind Orte gleichen Gravitationspotentials. Wanderungen zwischen Orten auf unterschiedlichen Höhenlinien erfordern, mit Blick auf das Gravitationspotential, nur die Arbeit $W = m \cdot g \cdot \Delta h$ zur Überwindung der Höhendifferenz Δh, unabhängig vom gewählten Weg. Besuche von Orten auf gleicher Höhe oder Rundwege kosten überhaupt keine Arbeit. Die Gradienten an jedem Ort zeigen die Richtung der größten Steigung: Fließendes Wasser folgt ihnen. Man erkennt diese Eigenschaft auch an den Bächen im Kartenausschnitt: Sie verlaufen (fast) senkrecht zu den Höhenlinien.

Versuch 1 Die Kraft ist die Ableitung des Potentials: Unterschiedliche verlaufende Potentiale im Schwerefeld führen zu unterschiedlichen Kräften: Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht.



Versuch 2 Dynamische Stabilisierung durch ein der Masse angepasstes, zeitlich veränderliches Potential: Prinzip der Paul Falle für einzelne Teilchen.

1.8.4 Die kinetische Energie

Wird ein Körper der Masse *m* konstant beschleunigt, dann wirkt an ihm entlang eines Weges *s* eine Kraft *F*, es wird also Arbeit an ihm verrichtet. Endet die Beschleunigung, dann endet auch die Kraftwirkung und damit die Zunahme der Arbeit. Der Körper bewegt sich nun aber mit höherer Geschwindigkeit. Die ihm während der Beschleunigung zugeführte Energie bleibt jetzt als kinetische Energie erhalten.

Formel	Erläuterung
$W = F \cdot x$	Arbeit bei Wirkung einer Kraft *F* entlang des Weges *x*
$F = m \cdot a$	2. Newtonsches Axiom
$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot x}$	Geschwindigkeit nach konstanter Beschleunigung. *a* und *x* werden durch die Kraft bzw. die Energie ausgedrückt. Es folgt, aufgelöst nach der Energie:
$v = \sqrt{2 \cdot \frac{F}{m} \cdot x}$	
$v = \sqrt{2 \cdot \frac{F}{m} \cdot \frac{W}{F}}$	
$W_{Kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$	Kinetische Energie eines Massenpunktes nach konstanter Beschleunigung

Tabelle 10 Kinetische Energie, Herleitung für konstante Beschleunigung

Unabhängig von der Art der Beschleunigung, ob gleichförmig oder nicht, hat jeder bewegte Körper eine kinetische Energie, die *nur von der Geschwindigkeit und der Masse* abhängt:

$W_{Kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$	Kinetische Energie eines Massenpunktes mit Geschwindigkeit v

Tabelle 11 Kinetische Energie

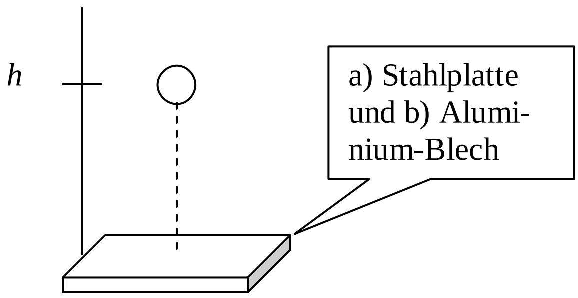
1.8.5 Der Energieerhaltungssatz der Mechanik

In jedem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie, das ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, erhalten. Das ist die Aussage des Energieerhaltungssatzes der Mechanik:

$E_{Kin} + E_{Pot} = const$	Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist konstant

Auch der Energieerhaltungssatz gilt unabhängig von der Geschichte der Beschleunigung und dem zeitlichen Verlauf der Kraftwirkungen. Das Weg-Zeit Gesetz muß nicht bekannt sein, die Kenntnis der Änderung der potentiellen Energie genügt zur Bestimmung der maximal erreichbaren Geschwindigkeit.

Versuch 3 Fall einer Kugel: a) Konservativ und b) dissipativ.



a) Die Kugel fällt auf eine Stahlplatte: Konservative Bewegung, elastischer Stoß

Höhe	Potentielle Energie	Geschwindigkeit	Kinetische Energie	Summe der Energien
h	$m \cdot g \cdot h$	0		$m \cdot g \cdot h$
0	0	$\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$	$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$	$m \cdot g \cdot h$

Tabelle 12 Energien bei konservativer Bewegung

b) Die Kugel fällt auf eine Aluminium-Platte: Dissipative Bewegung, inelastischer Stoß
In diesem Fall verschwindet die Bewegungsenergie des Körpers im Gewimmel der Bewegung der Teilchen. Es erhöht sich die kinetische Energie der Teilchen, deshalb erwärmt sich der Körper.

Die nächsten beiden Versuche zeigen die Gültigkeit der Energieerhaltung bei unterschiedlichen Weg-Zeit Gesetzen:

Versuch 4 Maxwellsches Rad: Elastische Reflexion am unteren Umkehrpunkt (Jo-Jo). Die potentielle Energie wird in Bewegungsenergie des Rads gewandelt.

Versuch 5 Fangpendel: Die maximale Geschwindigkeit des Pendels hängt nur von der Anfangshöhe ab. Sie ist von den unterschiedlichen Weg-Zeitgesetzen für die unterschiedlichen Fanghöhen unabhängig.

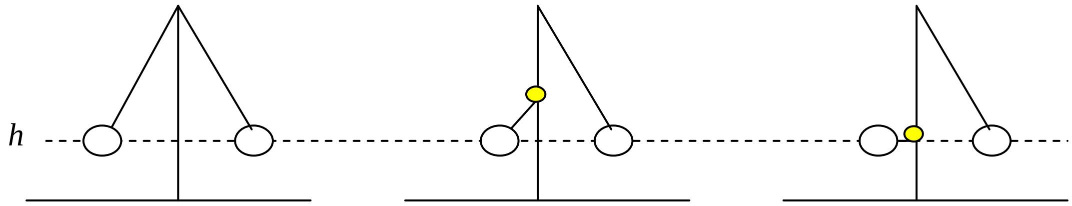


Abbildung 4 Das Fangpendel zeigt die Unabhängigkeit der Steighöhe des Pendels von seiner „Bewegungsgeschichte“

Versuch 6 Vorderrad eines Fahrrads: Energieerhaltung im Drehpendel

1.9 Der Impuls

Der Impuls ist neben der Energie eine weitere Erhaltungsgröße. Im Gegensatz zur skalaren Energie ist der Impuls ein Vektor. Bewegt sich ein Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit, dann ist sein Impuls definiert als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Die Richtung des Impulses ist die der Geschwindigkeit:

Formel	Einheit
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$[p] = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Impuls und Kraft sind wie Geschwindigkeit und Beschleunigung über Differentiation bzw. Integration miteinander verknüpft:

Impuls, Impulsänderung	Kraft	
$\vec{p}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Die Ableitung des Impulses nach der Zeit ist die Kraft
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a}$	
$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$	$\vec{F}$	Das zeitliche Integral der Kraft nennt man „Kraftstoß“, es ist gleich der Impulsänderung

Tabelle 13 Kraft und Kraftstoß, die Masse sei zeitlich konstant

Wenn sich die Geschwindigkeit schnell ändert, dann treten auch bei kleinen Impulsen, d.h. kleinen Massen oder kleinen Geschwindigkeiten, hohe Kräfte auf. Mit den Sicherheitssystemen im Fahrzeugbau wird angestrebt, die Zeit zum Abbremsen zu verlängern. Die zeitliche Ableitung des Impulses wird dadurch kleiner, die Kräfte auf die Personen verkleinern sich um den Faktor des Zeitgewinns.

1.9.1 Der Impulserhaltungssatz

Wirken auf ein abgeschlossenes System von Massenpunkten keine äußeren Kräfte, dann bleibt die Summe der Impulse zeitlich konstant.

$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_S = const$	Bilden N Massenpunkte ein abgeschlossenes System, dann ist die Summe ihrer Impulse zeitlich konstant

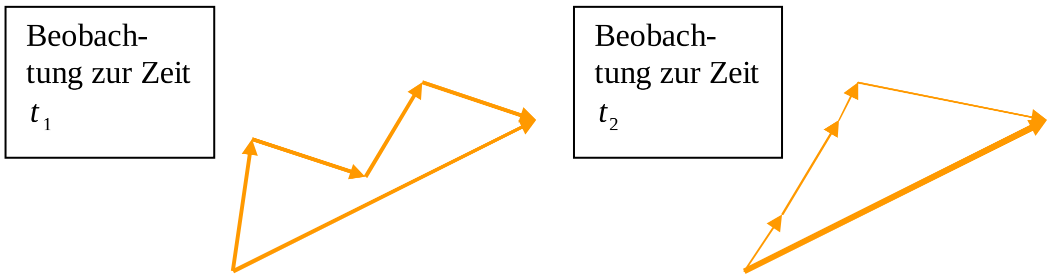


Abbildung 5 Nach dem Impulssatz erlaubte Vektoren für die Impulse eines Systems aus 4 Massenpunkten. Der lange Vektor zeigt die zeitlich konstant Summe $\vec{p}_S$. Mehrere Kombinationen erfüllen den Impulssatz. Aber nur eine Kombination erfüllt auch noch den Energiesatz, nur diese beschreibt die reale Bewegung.

Für zwei Massen folgt der Impulserhaltungssatz aus dem dritten Newtonschen Axiom, weil Kraft und Gegenkraft gleich, aber entgegensetzt gerichtet sind:

Formel	Erläuterung
$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$	actio=reactio: Die Summe der Kräfte ist Null
$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$	Die Summe der zeitlichen Ableitungen der Impulse ist Null
$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$	
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$	Die Summe der Impulse ist zeitlich konstant

Tabelle 14 Zur Herleitung des Impulssatzes aus dem 3. Newtonschen Axiom

1.9.2 Der Schwerpunkt

Nach dem Impulserhaltungssatz ist die Summe der einzelnen Impulse eine Erhaltungsgröße. Betrachtet man den Gesamtimpuls, dann verhält sich das System wie ein einziger Massenpunkt. Dieser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, also kräftefrei. Die Masse dieses Massenpunktes ist die Summe der Masse der Komponenten. Der Ortsvektor dieses Punktes, der sich gleichförmig mit dem Gesamtimpuls bewegt, ist der des Schwerpunktes oder Massenmittelpunktes. Er berechnet sich aus den Massen und Ortsvektoren der einzelnen Komponenten des Systems:

Formel	Anmerkung
$m_S = \sum_{i=1}^{N} m_i$	Gesamte Masse des Systems
$\vec{p}_S = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{x}}_i$	Gesamter Impuls des Systems, bleibt zeitlich konstant
$\vec{x}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$	Definition der Schwerpunktkoordinaten
$\vec{v}_S = \dfrac{\vec{p}_S}{m_S}$	Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes folgt aus der Ableitung seiner Ortskoordinaten. Sie ist nach Betrag und Richtung konstant

Tabelle 15 Koordinaten des Schwerpunktes für ein System aus N Massenpunkten

Zur Berechnung der Bewegung mehrerer Teilchen eines abgeschlossenen Systems ist es vorteilhaft, die Lage der Teilchen im Schwerpunktsystem anzugeben, weil sich nur dann alle Impulse zu Null addieren.

Versuch 7 Schuß von der Schaukel: Der Schaukel wird vom Kraftstoß des Schusses ein Impuls erteilt. Schuß auf der Schaukel: Der Gesamtimpuls bleibt null. Die Schaukel bewegt sich rückwärts, kehrt aber in seine Ruhelage zurück, sobald die Kugel im Kugelfang auf der Schaukel angekommen ist.

Versuch 8 Impulserhaltung am Luftkissenfahrzeug. Zwei Wagen variablen Gewichts werden von einer zwischen ihnen gespannten Feder in entgegengesetzte Richtungen gleich große Kraftstöße mitgeteilt. Bei der anschließenden Fahrt werden die Impulse der Fahrzeuge bestimmt.

Versuch Nr.	Wagen	Masse m	Weg s	Zeit t	$v = \frac{s}{t}$	Impuls $p = m \cdot v$
1	1	1				
	2	1				
Summe der Impulse						
2	1	1				
	2	2				
Summe der Impulse						

Tabelle 16 Ergebnisse des Versuchs mit dem Luftkissenfahrzeug

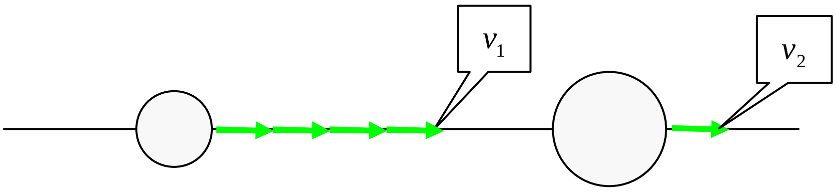
1.9.3 Der elastische Stoß

Die Massenpunkte beim elastischen Stoß erfüllen die Energie- und die Impulserhaltung. Mit diesen Bedingungen können aus den Geschwindigkeiten vor dem Stoß die nach dem Stoß errechnet werden. Beim elastischen Stoß werden keine Verluste durch Reibung oder Verformung berücksichtigt. Im folgenden werden einige Stöße in unterschiedlicher Geometrie behandelt.

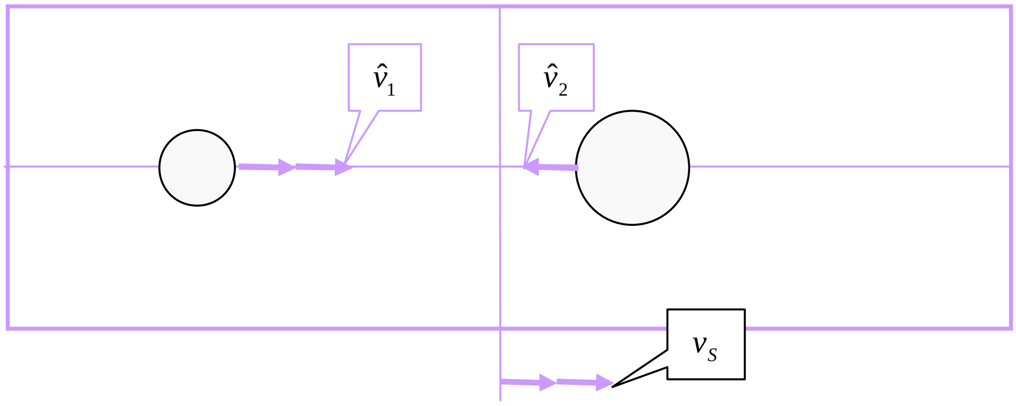
1.9.3.1 Der zentrale Stoß

Ein Massenpunkt stößt auf einer eindimensionalen Fahrbahn zentral auf einen zweiten. Im Schwerpunktsystem ist bei festen Massen die Geschwindigkeit eines Teilchens der einzige Parameter für die Ergebnisse nach dem Stoß. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes wird nach Tab. 13 berechnet.

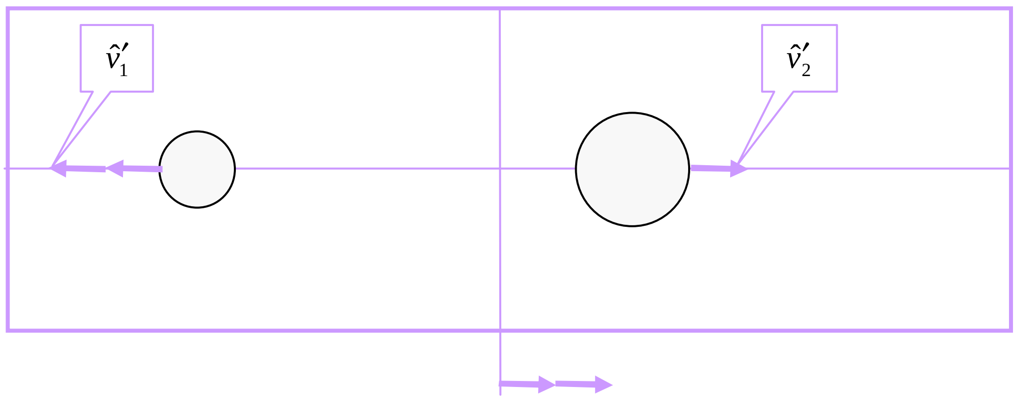
Vor dem Stoss



Transformation ins Schwerpunktsystem: $\hat{v}_i = v_i - v_S$



Nach dem Stoß



Transformation ins Laborsystem: $v_i = \hat{v}_i + v_S$

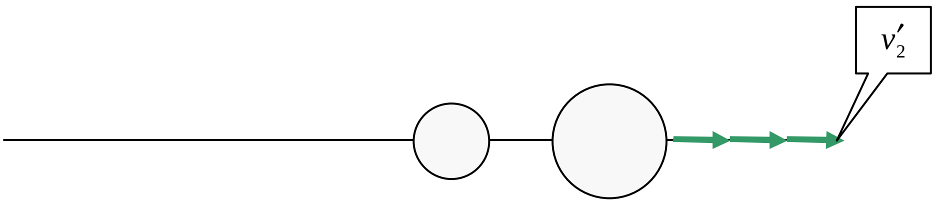


Tabelle 17 Zentraler Stoß. Die Massen verhalten sich wie 1:2, die Anfangsgeschwindigkeiten wie 4:1 (hellgrüne Vektoren). Nach dem Stoß steht Masse 1, Masse 2 bewegt sich mit 3-facher Geschwindigkeit (dunkelgrüne Vektoren).

Die oben gezeigte Vektor Konstruktion, die Pfeile zeigen die Geschwindigkeiten, genügt der Impuls- und Energieerhaltung. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß werden analytisch aus den Erhaltungssätzen bestimmt:

<table>
<tr><th>Im Laborsystem</th><th colspan="2">Im Schwerpunktsystem</th><th colspan="2">Anmerkung</th></tr>
<tr><td>$\sum_i p_i = \sum_i p_i'$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Impulserhaltung</td></tr>
<tr><td>$\sum_i \frac{1}{2m_i} p_i^2 = \sum_i \frac{1}{2m_i} p_i'^2$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Energieerhaltung</td></tr>
<tr><td>$v_S = \frac{\sum_i m_i \cdot v_i}{\sum_i m_i}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Geschwindigkeit des Schwerpunktes</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\hat{v}_i = v_i - v_S$</td><td colspan="2" rowspan="2">Transformation vom Labor- ins Schwerpunktsystem</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\hat{v}_i' = v_i' - v_S$</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="2">$\sum_i \hat{p}_i = 0$</td><td>Vor dem Stoss</td><td rowspan="2">Impulserhaltung</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum_i \hat{p}_i' = 0$</td><td>Nach dem Stoss</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum_i \frac{1}{2m_i} \hat{p}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2m_i} \hat{p}_i'^2$</td><td colspan="2">Energieerhaltung</td></tr>
<tr><td>$\hat{p}_1' = -\hat{p}_1$</td><td>$\hat{v}_1' = -\hat{v}_1$</td><td colspan="2" rowspan="2">Lösung der Gleichungen im Schwerpunktsystem</td></tr>
<tr><td>$\hat{p}_2' = -\hat{p}_2$</td><td>$\hat{v}_2' = -\hat{v}_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$v_i = \hat{v}_i + v_S$</td><td colspan="2" rowspan="2">Rücktransformation vom Schwerpunktsins Laborsystem</td></tr>
<tr><td colspan="3">$v_i' = \hat{v}_i' + v_S$</td></tr>
<tr><td>$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">Lösung im Laborsystem</td></tr>
<tr><td>$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 18 Berechnung der Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß in einer Dimension. Der Strich steht für „nach dem Stoß", das Dach für „im Schwerpunktsystem". Alle Summen laufen von 1 bis 2.

Formuliert man die Lösung als Funktion des Verhältnisses der Massen, dann bekommen die relativen Geschwindigkeiten die folgende, einfache Form, wenn eine der beiden Massen vor dem Stoß im Laborsystem ruht:

Verhältnis der Massen	Geschwindigkeit nach dem Stoß dividiert durch die Geschwindigkeit v_1 vor dem Stoß	
	Masse 1	Masse 2
$x = \frac{m_2}{m_1}$	$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{1-x}{1+x}$	$\frac{v_2'}{v_1} = \frac{2}{1+x}$

Tabelle 19 Geschwindigkeitsverhältnisse nach dem elastischen zentralen Stoß für $v_2 = 0$

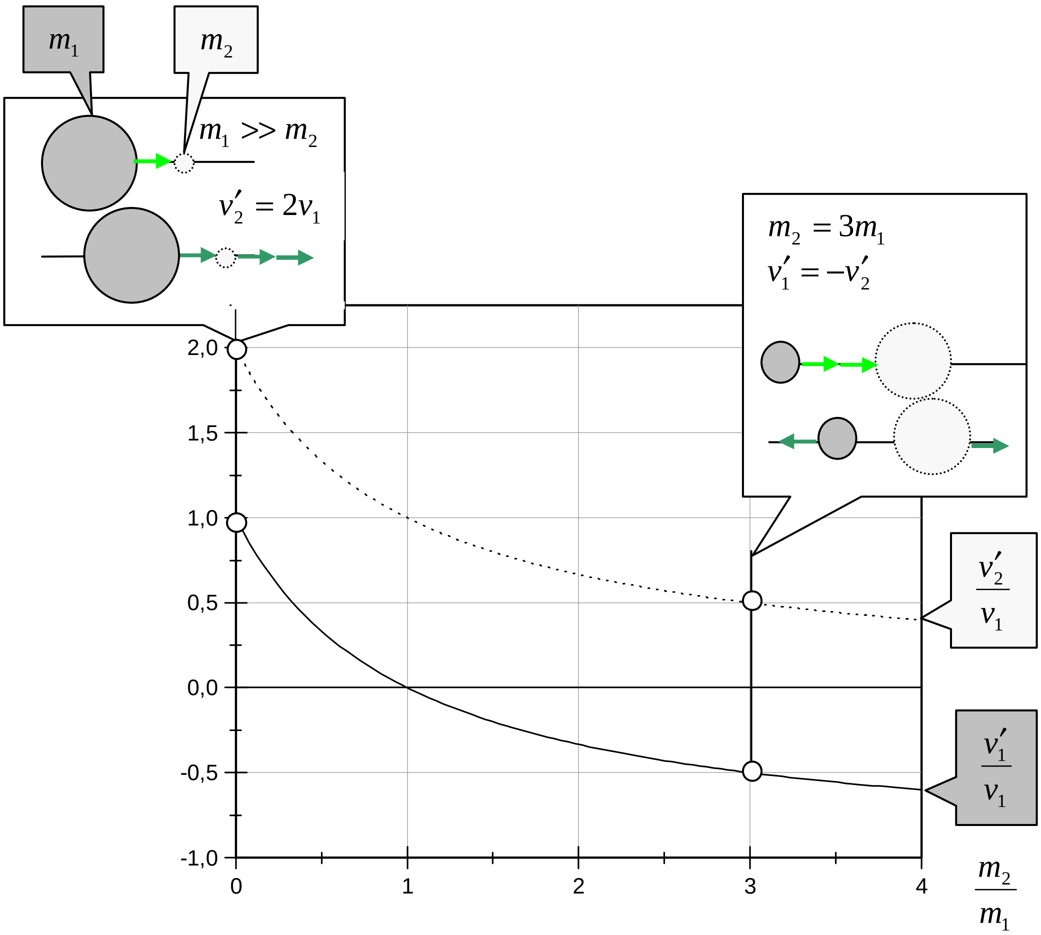


Abbildung 6 Eine Masse m_1 (dunkelgrau) mit Geschwindigkeit v_1 stosse zentral auf eine ruhende Masse m_2 (hellgrau). Die Ordinate zeigt das Verhältnis der Geschwindigkeiten nach dem Stoss (v_1', v_2') zu der vor dem Stoss (v_1). Die Abszisse zeigt das Verhältnis der Massen. Setzt man $v_1 = 1$ m/s, dann zeigt die Ordinate die Geschwindigkeiten nach dem Stoss in m/s: Obere Kurve die Geschwindigkeit der zuvor ruhenden Masse (v_2'), untere Kurve die der auffahrenden (v_1'). Die eingesetzten Fenster zeigen oben links die Situation für eine sehr schwere auffahrende Masse und unten rechts für das Massenverhältnis 1:3. Jedes Fenster zeigt oben die Situation vor (Vektoren der Geschwindigkeiten hellgrün), unten nach dem Stoss (Vektoren der Geschwindigkeiten dunkelgrün).

1.9.3.2 Der nicht zentrale Stoß

Eine Kugel trifft schräg auf eine ruhende Kugel mit gleicher Masse. Aus dem Energie- und Impulserhaltungssatz folgt der Winkel zwischen den Flugbahnen nach dem Stoß zu genau 90°.

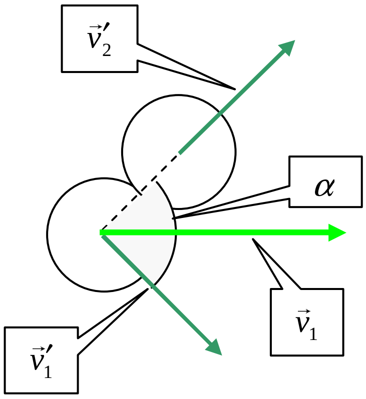


Abbildung 7 Der nicht zentrale Stoß, Vektoren der Geschwindigkeit: hellgrün vor, dunkelgrün nach dem Stoß

Formel	Anmerkung
$m \cdot \vec{v}_1' + m \cdot \vec{v}_2' = m \cdot \vec{v}_1$	Impulserhaltung
$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_1^{\,2}$	Energieerhaltung
$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^{\,2}$	
$(\vec{v}_1' + \vec{v}_2') \cdot (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = \vec{v}_1^{\,2}$	Impulserhaltung, quadriert
$v_1'^2 + 2 \cdot v_1' \cdot v_2' \cdot \cos\alpha + v_2'^2 = v_1^{\,2}$	
$\alpha = 90^0$	Nur dann erfüllt das Quadrat der Impuls-erhaltung den Energiesatz

Tabelle 20 Herleitung der Richtungsabhängigkeit beim nicht zentralen Stoß

Versuch 9 Nicht zentraler Stoß zwischen zwei Kugeln. Der Winkel zwischen den Bahnen wird nachgemessen: Er ist für alle Stoßwinkel immer 90°.