Vorlesung Experimentalphysik I am 29.11.1999 und 30.11.1999 J. Ihringer

2.4 Starrer Körper mit freier Drehachse

Man weiß aus Erfahrung, daß die Bahn eines auf dem Tisch zur Rotation gebrachten Kreisels, im Gegensatz zu der eines geradlinig beschleunigten Körpers, kaum vorhersehbar verläuft.

Versuch 1 Unterschiedliche Kreisel werden auf dem Tisch mit gleichgerichtetem Drehimpuls gestartet. Ihre Bahn wird beobachtet. Vergleich mit der Bahn bei geradliniger Beschleunigung.

Auf geradliniger Bahn ist die Geschwindigkeit durch Multiplikation mit der skalaren Masse an die Erhaltungsgröße des Impulses gekoppelt, beide sind immer gleichgerichtet. Dagegen liegt bei Rotationsbewegungen der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht immer in Richtung der Erhaltungsgröße, dem Drehimpuls: Sie sind durch das Trägheitsmoment gekoppelt, das von Richtung und Lage der Achse und damit von der räumlichen Verteilung der Massen abhängt. Nur für drei spezielle Achsen sind Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls gleichgerichtet. Für andere Achsen ist das Trägheitsmoment nicht als Skalar darstellbar.

Impuls $\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L}$
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = J \cdot \vec{\varpi}$

Tabelle 1 Impuls und Drehimpuls. M Masse, $\vec{v}$ Geschwindigkeit, J Trägheitsmoment, $\vec{\varpi}$ Winkelgeschwindigkeit.

Die drei bevorzugten Richtungen zeigen die *drei „Hauptträgheitsachsen*“, die alle durch den Schwerpunkt verlaufen und zueinander senkrecht stehen. Die drei Trägheitsmomente in diesen Richtungen definieren das „*Trägheitsellipsoid*“. Für eine stabile Rotation muß die Drehachse in einer von zwei dieser Richtungen liegen.

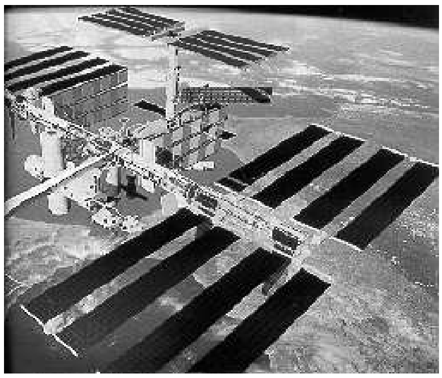

Abbildung 1 Links: „Weltraumrad“, (Werner von Braun 1952) die Zentrifugalkraft bei Drehung um seine Achse ersetzt die Schwerkraft. Rechts: Die Raumstation ISS wird nur geradlinig bewegt, die Bewegungsgesetze sind viel einfacher.

Eine sehr ausführliche Herleitung der mit der Rotation starrer Körper verbundenen Begriffe findet sich in Gönnenwein. (http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Dank.DOC - Gönnenwein). Information zur ISS (Fahrplan etc.): http://www.heavens-above.com/.

2.4.1 Das Trägheitsellipsoid

Das Trägheitsellipsoid beschreibt für die Rotationsbewegung den Einfluß der Verteilung der Massen auf den Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Man erhält es, indem man zunächst für alle durch den Schwerpunkt verlaufenden Achsen das Trägheitsmoment bestimmt. Ausgehend vom Schwerpunkt zeichnet man für jede Richtung einen Strahl, auf dem der Kehrwert der Wurzel des für diese Richtung gefundenen Trägheitsmoments abgetragen wird.

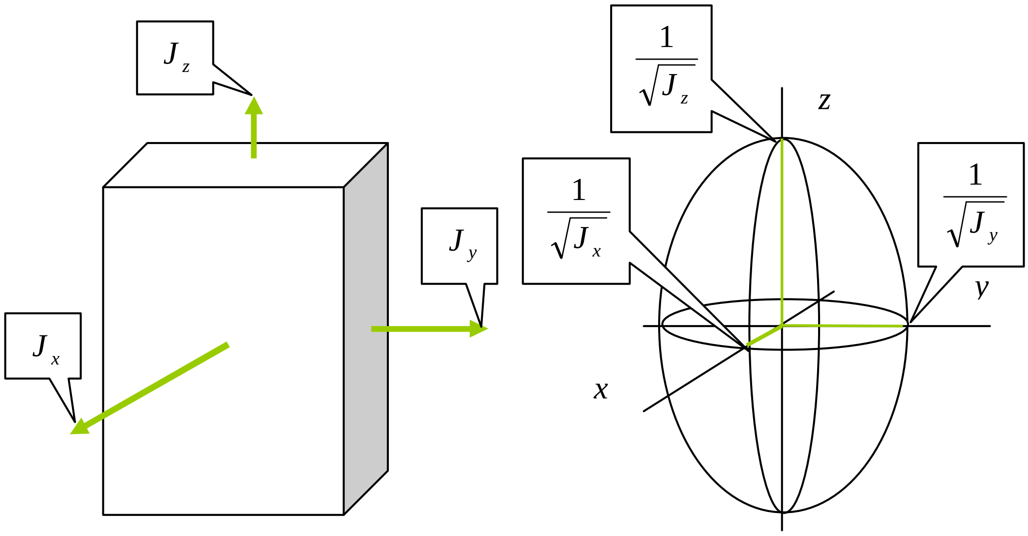

Abbildung 2 Drehimpulse (gelbgrüne Pfeile) in Richtung der Hauptträgheitsachsen und Trägheitsellipsoid für einen Quader. Nur die Richtungen x und z des größten und kleinsten Trägheitsmoments sind mögliche Achsen für stabile, freie Rotation.

Für beliebig geformte Körper erhält man auf diese Weise immer ein Ellipsoid, das sich der Gestalt des Körpers anschmiegt. Bevorzugte Richtungen dieses „Trägheitsellipsoids“ sind die drei Hauptachsen: Nur um Achsen in Richtungen des größten und des kleinsten Trägheitsmoments rotiert der Körper stabil. Bei stabiler Rotation ändert die freie Drehachse ihre Lage im Körper nicht. Die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ist labil, eine kleine Störung genügt, um die Rotationsachse zu verschieben. In Letzterem und allen andern Fällen „eiert“ der Körper.

Versuch 2 Vier Jo-Jo Aufbauten mit unterschiedlichen Trägheitsellipsoiden

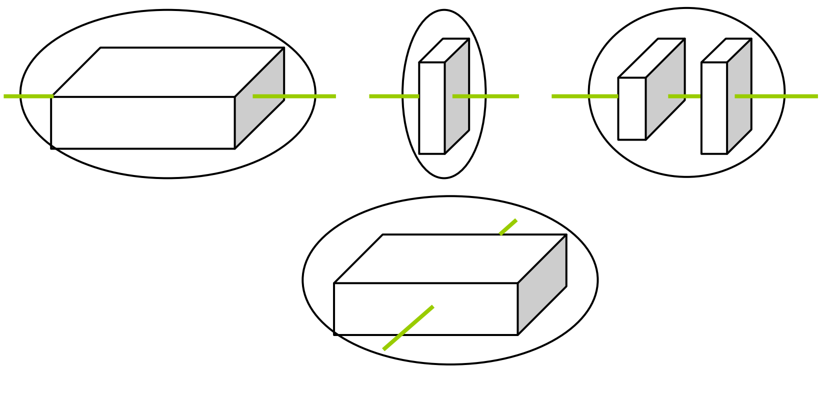

Abbildung 3 Schema der vier Jo-Jo Aufbauten mit den dazugehörigen Trägheitsellipsoiden. Die Achse der Rotation liegt in den Konstruktionen links in Richtung des größten bzw. des kleinsten Trägheitsmoments, rechts sind alle Achsen gleichberechtigt: Das Jo-Jo läuft stabil. Darunter: Rotation um die mittlere Achse des Trägheitsellipsoids: Das Jo-Jo läuft instabil.

Versuch 3 Wurf mit Rotation eines Quaders: Nur um die Achsen größten und kleinsten Trägheitsmoments rotiert er stabil (vgl. Abb. 2).

Versuch 4 Mit Hilfe einer Bohrmaschine werden unterschiedliche Körper in Rotation versetzt: a) Eine Kette b) Ein Stab c) Ein Holzring. Alle rotieren nach einer Anfahrzeit um die Achse ihres größten Trägheitsmoments.

2.4.2 Drehimpuls für beliebige Drehachsen: Die Poinsot Konstruktion

Für eine vorgegebene Richtung der Drehachse erlaubt das Trägheitsellipsoid die Ermittlung der Richtung des Drehimpulses nach der „Poinsot-Konstruktion“: Der Drehimpuls steht immer senkrecht auf der Tangentialebene des Trägheitsellipsoids im Durchstoßpunkt der Drehachse.

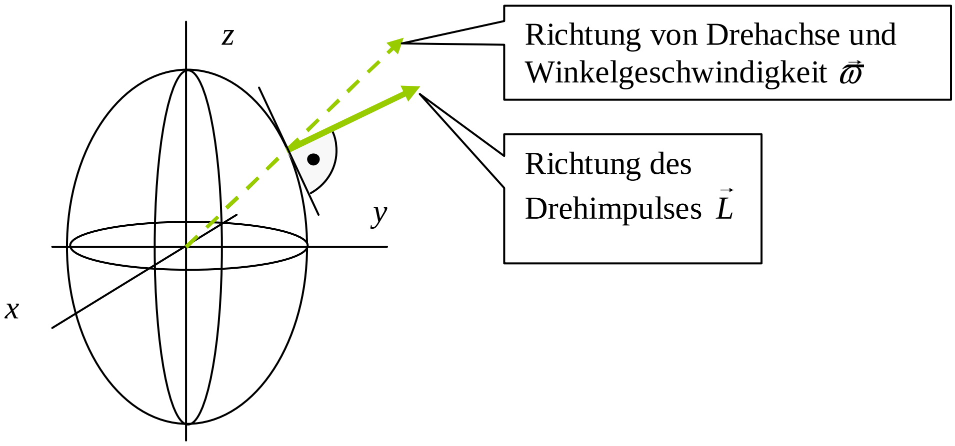

Abbildung 4 Poinsot Konstruktion zur Bestimmung der Richtung des Drehimpulses: Der Drehimpuls $\vec{L}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene. Diese „invariante Ebene“ tangiert den Trägheitstensor im Durchstoßpunkt von $\vec{\varpi}$.

Man beachte, daß die Richtung von Drehachse bzw. Winkelgeschwindigkeit nicht immer die Richtung des Drehimpulses ist. Mathematisch wird die Verknüpfung zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls durch den Trägheitstensor J ausgedrückt. (http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Mathe.DOC - Tensor)

2.5 Kreisel

Ein Kreisel ist ein rotierender, rotationssymmetrischer Körper. Man unterscheidet den kräftefreien Kreisel und den Kreisel unter dem Einfluß eines Drehmoments. Einige Bewegungszustände kann man mit dem Drehimpulserhaltungssatz bei entsprechender Zerlegung oder Addition der Vektoren für Drehimpulse und Drehmomente verstehen. Zur Charakterisierung der Kreiselbewegung gibt es außer der Dreh- noch den Begriff der Figurenachse.

2.5.1 Der kräftefreie Kreisel

Der kräftefreie Kreisel ist im Schwerpunkt gelagert. Sein Trägheitsellipsoid zeigt eine ausgezeichnete Richtung, die auch die Figurenachse ist. Unter idealen Bedingungen rotiert er um die Figurenachse mit konstantem Drehimpuls. Die Figurenachse liegt in Richtung der Drehachse $\vec{\varpi}$ und in Richtung des konstanten Drehimpulses $\vec{L}$.

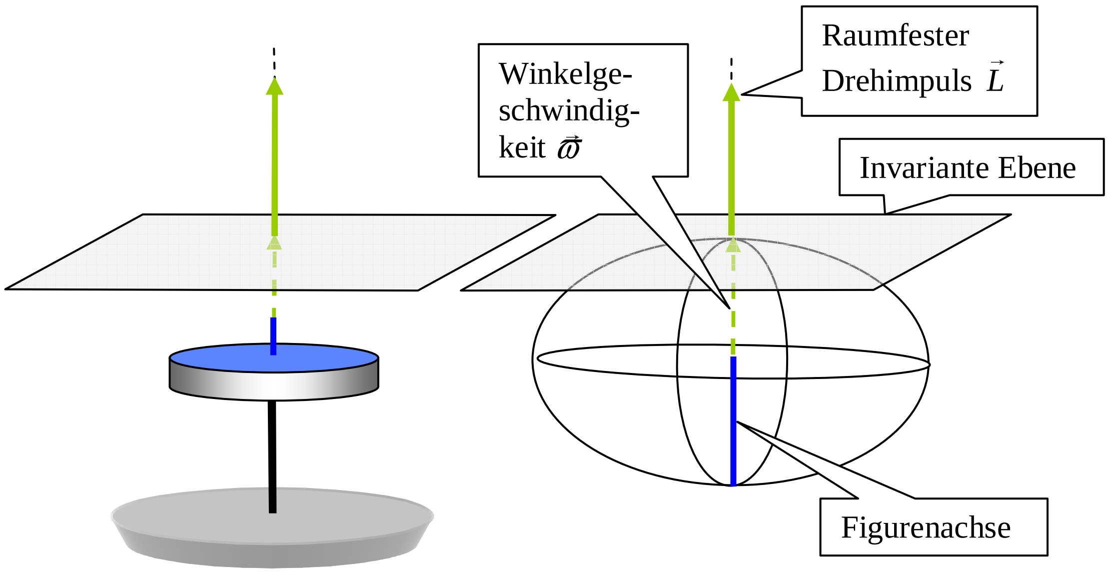

Abbildung 5 Kreisel und Trägheitsellipsoid bei Drehung um die Achse des größten Trägheitsmoments. Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit zeigt die momentane Drehachse.

Versuch 5 Künstlicher Horizont: Ein kardanisch aufgehängter Kreisel wird in schnelle Rotation versetzt. Bei beliebiger Bewegung behält der Drehimpuls seine Richtung bei.

Wirkt bei dem ideal rotierenden Kreisel kurzzeitig ein Drehmoment senkrecht zur Figurenachse, etwa bei einem Stoß, dann kommt die Achse $\vec{\varpi}$ außerhalb der Figurenachse zu liegen. Die Poinsot-Konstruktion zeigt die dazu gehörende Lage des Drehimpulses $\vec{L}$, der zeitlich konstant bleibt.

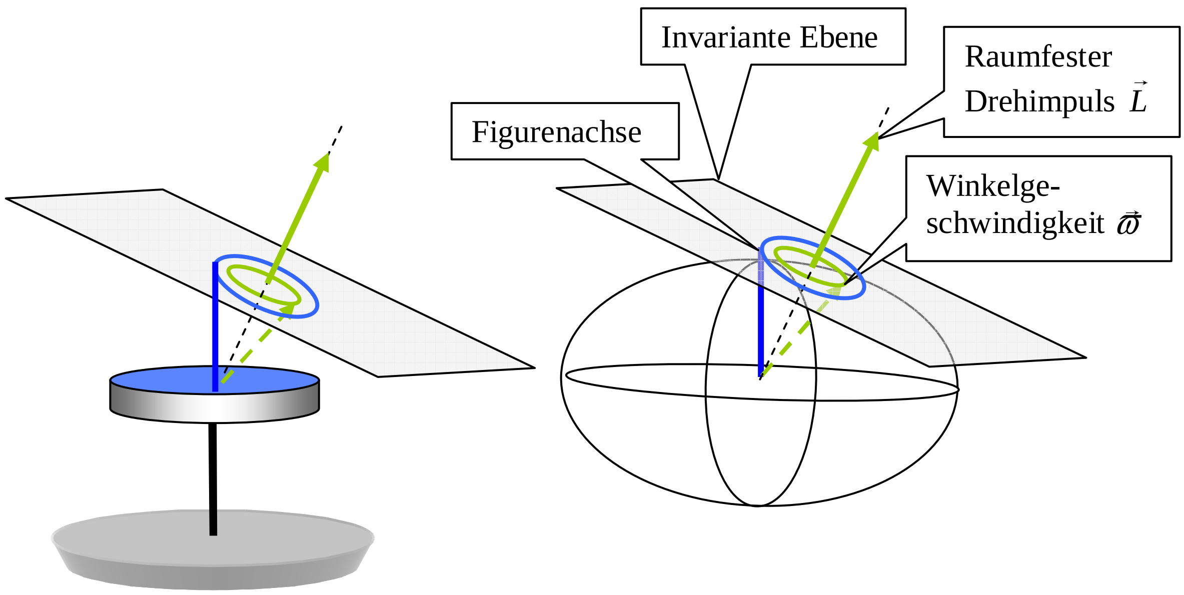

Abbildung 6 Nutationsbewegung eines im Schwerpunkt gelagerten Kreisels: Die Drehachse liegt außerhalb der Figurenachse. Die Figuren- und die momentane Drehachse laufen in Kreisbahnen auf der „invarianten Ebene“ um deren Normale, den invarianten Vektor $\vec{L}$ des Drehimpulses: Das Trägheitsellipsoid rollt auf der invarianten Ebene ab.

Versuch 6 Luftkissenkreisel: a) Im Stand wird die Kräftefreiheit überprüft b) Der Kreisel wird in Rotation versetzt: Die Drehachse ist die Figurenachse c) Ein Stoß auf die Figurenachse lenkt die Drehachse aus: Der Kreisel beginnt eine Nutationsbewegung.

2.5.2 Präzession des Kreisels

Wirkt auf einen Kreisel ein Drehmoment, dann ergibt sich daraus, entsprechend dem Kraftstoß bei der linearen Bewegung, ein in Richtung des Drehmoments weisender Beitrag zum Drehimpuls des kräftefreien Kreisels.

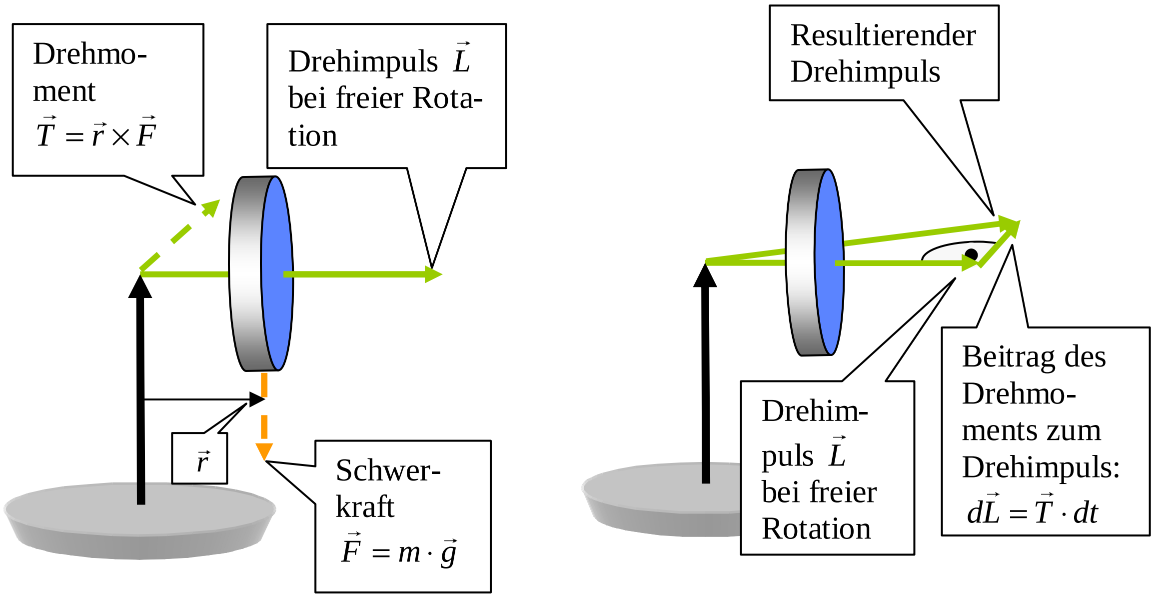

Abbildung 7 Zur Präzession des Kreisels. Links: Ein Kreisel sei im Schwerefeld im Abstand r vom Schwerpunkt gelagert, der Drehimpuls sei $\vec{L}$ (grün). Rechts: Die Schwerkraft (orange) erzeugt ein Drehmoment (grün strichliert). Rechts: Drehimpulse in Folge der links gezeigten Kraftwirkung.

Die vektorielle Addition der Drehimpulse ergibt die Richtung des resultierenden Drehimpulses, die Achse des Kreisels stellt sich in diese Richtung ein. Dauert die Wirkung des Drehmoments an, dann dreht sich die Kreiselachse senkrecht zu sich selbst und zur Richtung der Kraftwirkung: Der Kreisel führt eine Präzessionsbewegung aus.

Versuch 7 Kreisel mit Aufbau der Abbildung oben. a) Im Schwerpunkt unterstützt, freier Kreisel b) Präzession bei Lagerung außerhalb des Scherpunkts: Die Schwerkraft verursacht ein Drehmoment.

Versuch 8 Luftkissenkreisel mit Scheibe, die seinen Schwerpunkt verschiebt: Präzessionsbewegung

2.5.2.1 Der Kreiselkompass

Beim Kreiselkompass wird durch eine entsprechende Lagerung die Achse immer parallel zur Erdoberfläche gehalten. Bezüglich eines außerhalb der Erde liegenden Koordinatensystems wird die Kreiselachse bei der Rotation der Erde um die Nord Süd Achse verkippt. Die Kreiselachse weicht diesem Drehmoment durch eine Präzessionsbewegung aus, die solange anhält, bis die Kreiselachse in Nord Süd Richtung liegt. Es gibt kein Drehmoment, wenn der Kreisel um seine Rotationsachse verkippt. Wegen der Drehimpulserhaltung behält der Kreisel diese Ausrichtung bei Der Kreiselkompass ist wegen seiner Größe nur auf Schiffen eine Alternative zum magnetischen Kompass: Eisenteile führen nicht zu Missweisung.

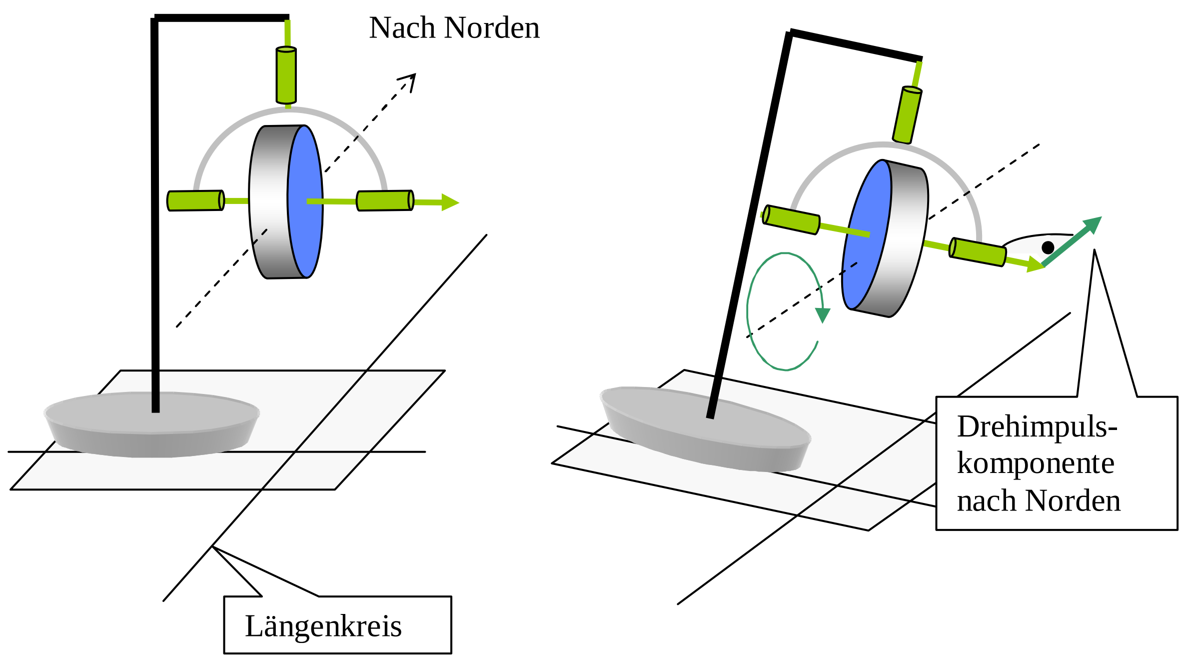

Abbildung 8 Der Kreiselkompass: Zwischen dem Bild links und rechts kippt die Erdrotation Kreiselachse um die strichlierte, von Süd nach Nord weisende Achse nach unten. Dieses Drehmoment verursacht eine nach Norden weisende Komponente zum Drehimpuls. Der Kreisel weicht diesem Drehmoment durch eine Präzessionsbewegung aus, bis die Kreiselachse in der strichlierten Achse liegt. Die freien Achsen und ihre Lagerungen sind grün gezeichnet.

Versuch 9 Kreiselkompass, entsteht aus dem der kardanisch aufgehängten Kreisel bei Blockierung eines Gelenks: Bei Drehung des Globus richtet sich die Kreiselachse nach Norden aus.

2.5.3 Dynamisches Auswuchten

Eine wichtige Anwendung der Theorie stabiler Rotationen ist das „Auswuchten" von Rädern oder rotierenden Maschinenteilen. Für ruhigen Lauf muß die Hauptträgheitsachse in der Drehachse liegen. Meistens ist die Drehachse konstruktiv vorgegeben. Beim „statischen Auswuchten" wird zuerst der Schwerpunkt auf die Drehachse gebracht. Beim anschließenden „dynamischen Auswuchten" wird durch Zusatzgewichte oder Materialentnahme die Verteilung der Massen solange verändert, bis die Drehachse auch Hauptträgheitsachse ist.

3 Mechanik deformierbarer Medien

Die Vorlesung über Mechanik begann mit der Untersuchung der Bewegungseigenschaften des Massenpunktes. Es genügte *eine Dimension*, realisiert in der Luftkissenfahrbahn, um die Gesetze zu studieren. *Drei Dimensionen* wurden für die Achslagen bei der Rotation starrer Körper berücksichtigt: Eine einzige Zahl für jede Richtung beschreibt das Trägheitsmomente bezüglich der Achse. Die *unterschiedlichen Möglichkeiten zur Anordnung* der Atome in drei Dimensionen, die Grundlage der vielfältigen Formen und Erscheinungen unserer Welt, werden untersucht, um die Auswirkung von Kräften auf die *Gestalt* der Körper zu verstehen.

3.1 Der Aufbau der Materie

Atome sind die Bausteine der Materie, sie setzen sich aus den Atomkernen mit der für jedes Element spezifischen Ladungszahl und der Elektronenhülle zusammen. Die Vorgänge in der

Elektronenhülle bestimmen das Erscheinungsbild und viele Eigenschaften der Materie, z. B. Farbe, chemische Bindung, Magnetismus, elektrische Leitfähigkeit. Während die Elektronenhülle das Volumen vorgibt, kann man sich die Masse der Atome im Kern vereinigt denken. Die Massen von Elektron $\left(9{,}11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)$ zu Proton oder Neutron $\left(1{,}67\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)$ verhalten sich wie 1:1836.

3.1.1 Kräfte zwischen den Bausteinen der Materie

Die Atomkerne sind aus den elektrisch positiv geladenen Protonen und elektrisch neutralen Neutronen aufgebaut, Kräfte der *starken Wechselwirkung* mit kurzer Reichweite halten die Kernbausteine zusammen. Die elektromagnetische Coulombkraft mit langer Reichweite hält die Elektronen auf ihren Bahnen um den Kern. Ist die Kernladung nicht vollständig durch eine entsprechende Elektronenzahl neutralisiert, dann bewirkt die Coulomb-Kraft die langreichweitige Bindung zwischen *Ionen*.

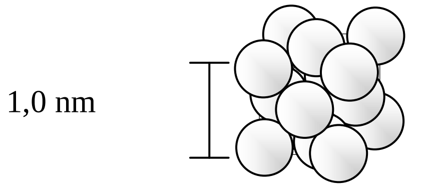

Abbildung 9 Modell starrer Kugeln für ein kubisches Metallgitters (z. B. Al, Fe, Cu, Au), dichteste Kugelpackung: Jede Kugel wirkt auf alle Nachbarn anziehend.

Kräfte	Beschreibung	Beispiel
Van der Waals Bindung	Isotrope, kurzreichweitige schwache Bindungskraft zwischen allen Atomen	Reale Gase, Bindung in Kristallen der Edelgase
Coulomb Kraft	Isotrope, langreichweitige Wechselwirkung zwischen Ladungen, im Atom zwischen Kern und Elektronen, im Kristall zwischen Ionen, (z. B. NaCl Kristall)	Kern und Elektronen NaCl-Kristall
Kovalente Bindung	Gerichtete Bindung durch gemeinsame Elektronen	Si-Kristall, organische Moleküle
Metall Bindung	Isotrope Bindung der Metallatome mit freien Elektronen im „Elektronengas“	Alle metallischen Leiter

Tabelle 2 Bindungskräfte zwischen Atomen und Ionen

Zwischen allen Atomen gibt es Bindungskräfte, aber auch abstoßende Kräfte kurzer Reichweite. Letztere lassen die Atome als starre Kugeln erscheinen, die durch Federn aneinander gebunden sind. Stabile Strukturen ergeben sich bei Gleichgewicht von Anziehung und Abstoßung. Allerdings ordnen sich die Atome nur dann zu Strukturen mit fester Gestalt, wenn die thermische Energie kleiner als die Bindungsenergie ist. Beginnt man bei tiefen Temperaturen mit sehr kleiner thermischen Energie (der Nullpunktsenergie der Quantenmechanik), dann findet man zunächst den festen Zustand.

Versuch 10 Zwei unterschiedliche Kugelpackungen entstehen bei der „dichtesten“ Stapelung von Tischennisbällen

Versuch 11 Korngrenzen im Kugelmodell

	Gas		Flüssigkeit	Fester Körper	
	Ideal	Real		Amorph	Kristallin
Wechselwirkung zwischen den Atomen oder Molekülen	keine	Schwach	Stärker als im Gas, schwächer als im Kristall: Ungerichtete Bindung der Teilchen aneinander	Hohe Wechselwirkung, aber keine Fernordnung: Erstarrte Flüssigkeit	Hohe Wechselwirkung, Fernordnung zwischen den Bausteinen
Beweglichkeit der Teilchen	Hoch, Teilchen bewegen sich unabhängig voneinander		Die Teilchen sind gegeneinander leicht zu verschieben	Die Atome oder Moleküle sind ortsfest, schwingen aber um ihre Ruhelage (Thermische Bewegung)	
Für den Zustand charakteristische physikalische Größe bei konstanter Temperatur und gegebener Teilchenzahl	Geschwindigkeit der Teilchen		Volumen	Gestalt	
Antwort des Materials auf mechanische Krafteinwirkung	Hohe Kompressibilität, viskose Strömung		Geringe Kompressibilität, viskoses Fließen	Elastizität	
Dichte bei Normaldruck und ~300 K	~0,001 g/cm^3		~ 1g/cm^3		

Tabelle 3Einige Eigenschaften der unterschiedlichen Aggregatzustände

Festkörper zeigen *Gestaltstabilität*, bei kleinen Auslenkungen im elastischen Bereich gilt das Hookesche Gesetz zwischen Auslenkung und Kraft. Die in diesem Bereich *makroskopisch* messbaren Zusammenhänge von Kraft und Verformung sind das Thema der Elastomechanik. Werden die Kräfte zu groß, dann verlässt man den Bereich der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes. An manchen Stellen gleiten die Teilchen schließlich aufeinander ab, der Körper verformt sich irreversibel und zerbricht am Ende, bleibt aber fest.

Erst bei Erhöhung der Temperatur geht der Festkörper am Schmelzpunkt in den flüssigen Zustand über. Dann gleiten die Teilchen so mühelos aneinander ab, daß die Gestalt ihrer Gesamtheit durch die Schwerkraft oder irgendeine andere Kraft, z. B. die Druckkräfte der Gefäßwände, gegeben wird. Wird die Temperatur bis zum Siedepunkt erhöht, dann löst sich der Kontakt zwischen den Teilchen vollständig. Im jetzt erreichten gasförmigen Zustand ist für eine gegebene Teilchenzahl nur die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten durch die Temperatur bestimmt. Druck und Volumen werden erst durch äußere Bedingungen definiert. Die mechanischen Materialeigenschaften im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand sind das Thema der nächsten Abschnitte.

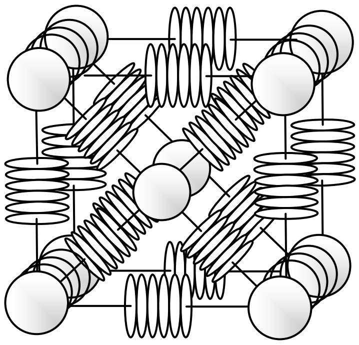

Abbildung 10 Die elastischen Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen eines Kristall - Gitters können als Federkräfte zwischen den atomaren Teilchen modelliert werden. Für kleine Auslenkungen gilt das Hookesches Gesetz. (Zur besseren Übersichtlichkeit wurden - im Vergleich zum atomaren Modell- einige Teilchen weggelassen).

3.2 Elastomechanik fester Körper

Die Gestalt fester Körper verformt sich unter der Wirkung einer geeigneten Kraft. Elastisch heißt die Verformung, wenn der Körper ohne Kraft seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt.

3.2.1 Dehnungselastizität

Die Elastizität hängt von der atomaren Ordnung des festen Körpers ab. Mit der Temperaturführung bei Wärmebehandlung kann man die Anzahl der Fehlstellen steuern.

Versuch 12 Die Elastizität eines waagrecht eingespannten Drahtes wird durch vollkommene Rückstellung nach be- und entlasten mit einem Gewicht gezeigt. Danach wir der Draht mit der Flamme eines Bunsenbrenners ausgeglüht: Die Anzahl der Fehlstellen erhöht sich stark. Bei Belastung nach Abkühlung knickt der Draht plastisch ab. „Recken“ ordnet das Gefüge, der Draht wird wieder elastisch.

Die Anzahl der Fehlstellen erhöht sich aber auch bei zu hoher mechanischer Belastung: Das kristalline Gefüge löst sich auf, das Material beginnt zu „fließen“. Bastler wissen, daß die ersehnte Bewegung einer sehr fest sitzenden Schraube das Fließen vor dem Bruch anzeigen kann.

Formel	Einheit	Erläuterung
$\sigma = \frac{F}{A}$	$1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	Spannung
F	$1\,\mathrm{N}$	Kraft
A	$1\,\mathrm{m}^2$	Fläche

Tabelle 4 Definition der mechanischen Spannung

Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ist die Spannung über den Elastizitätsmodul linear an die Dehnung gekoppelt:

<table>
<tr><th>Formel</th><th>Einheit</th><th colspan="2">Erläuterung</th></tr>
<tr><td>$\sigma = \varepsilon \cdot E$</td><td>$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$</td><td colspan="2">Spannung</td></tr>
<tr><td>$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$</td><td>1</td><td colspan="2">Dehnung, relative Längenänderung</td></tr>
<tr><td rowspan="7">E</td><td rowspan="7">$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$</td><td colspan="2">Elastizitätsmodul, Beispiele:</td></tr>
<tr><td>Material</td><td>$E\,[\mathrm{N/m}^2]$</td></tr>
<tr><td>Fe</td><td>$2 \cdot 10^{11}$</td></tr>
<tr><td>Al</td><td>$7 \cdot 10^{10}$</td></tr>
<tr><td>Glas</td><td>$6 \cdot 10^{10}$</td></tr>
<tr><td>Eschen Holz</td><td>$1 \cdot 10^{10}$</td></tr>
<tr><td>Gummi</td><td>$1 \cdot 10^{9}$</td></tr>
</table>

Tabelle 5 Definition des Elastizitätsmoduls

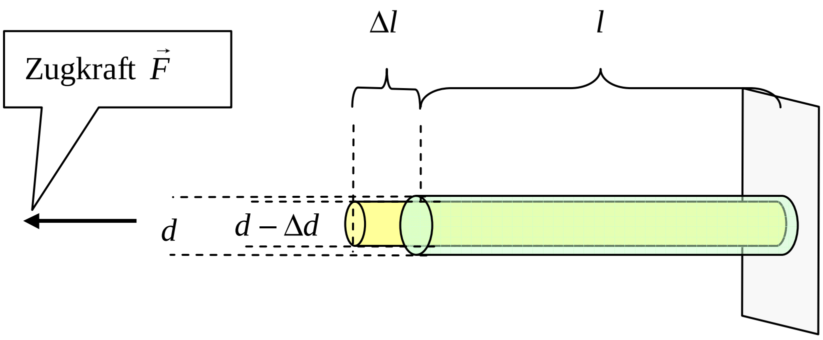

Abbildung 11 Dehnung eines Stabes mit Querschnitt A

Bei größerer Last wird die Verformung irreversibel, schließlich nimmt die Zugfestigkeit ab, bei zunehmendem Zug schnürt sich das Material lokal ein und reißt an der dünnsten Stelle.

Versuch 13 Dehnung eines Stahldrahts bis zum Bruch.

Verlängerung Δl	Dehnung $\frac{\Delta l}{l}$	Zugkraft

Tabelle 6 Dehnung und Spannung eines Stahldrahts

Versuch 14 Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes: Ein 11,5m langer Stahldraht wird elastisch gedehnt.

Kraft F	Verlängerung Δl	$E = \frac{F}{A \cdot \Delta l} \cdot l = \frac{F}{\pi \cdot r^2 \cdot \Delta l} \cdot l$

Tabelle 7 Berechnung des Elastizitätsmoduls für den Stahldraht

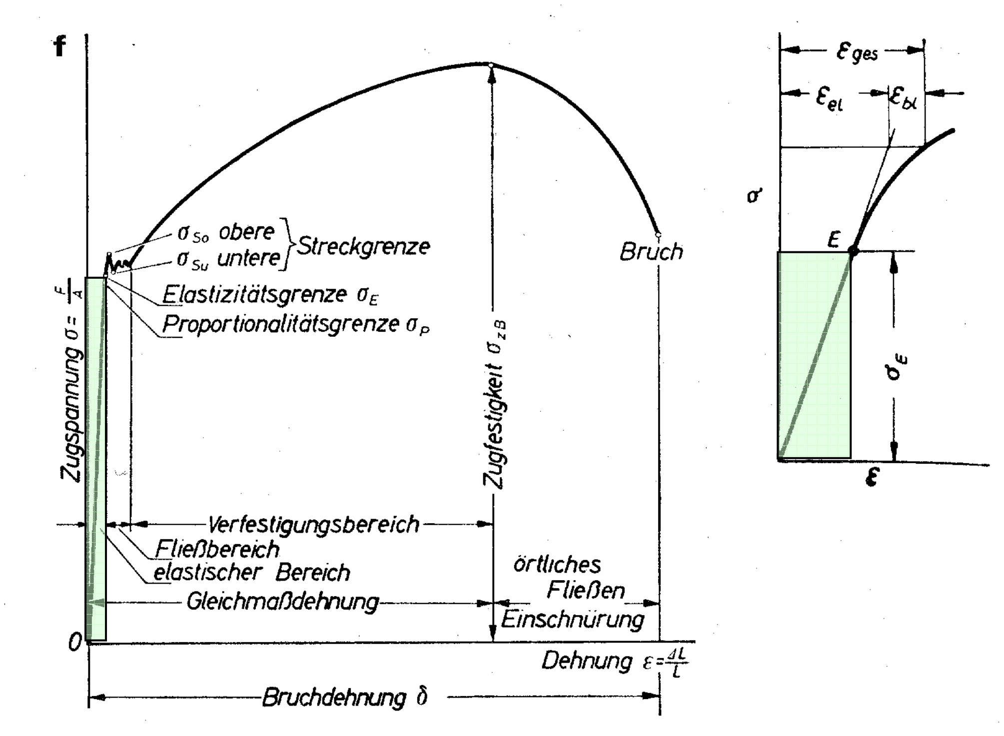

Abbildung 12 Bereiche der Dehnung im Festkörper. Im Einsatz rechts ist ε_{el} die elastische, ε_{bl} die bleibende Dehnung (Aus Netz, Formeln der Technik, 2. Auflage). Grün: Bereich der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes.

Wird das Material verlängert, dann wird sein Durchmesser kleiner, weil das Volumen annähernd konstant bleibt. Das Verhältnis der relativen Änderungen des Durchmessers und der Länge heißt Faktor der Querkontraktion oder Poisson Zahl. Sie liegt zwischen 0,2 und 0,5.

Formel	Erläuterung
$V = d^2 \cdot l$	Volumen eines Materials der Länge l mit quadratischem Querschnitt, Kantenlänge d
$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right) \cdot \Delta d + \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) \cdot \Delta l$	Volumenänderung bei Variation Δl der Länge und Δd des Durchmessers
$\Delta V = 2 \cdot d \cdot l \cdot \Delta d + d^2 \cdot \Delta l$	
$\frac{\Delta V}{V} = 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}$	
Bei $\Delta V = 0$ folgt:	
$2 \cdot d \cdot l \cdot \Delta d = -d^2 \cdot \Delta l$	Der Faktor der Querkontraktion heißt Poissonsche Zahl, bei $\Delta V = 0$ folgt $\mu = 0{,}5$
$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta l}{l} = -\mu \cdot \frac{\Delta l}{l}$	
$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \cdot \frac{\Delta l}{l}$	Meistens wächst das Volumen, $\Delta V \geq 0$, deshalb gilt $0{,}2 < \mu < 0{,}5$

Tabelle 8 Definition und Abschätzung der Poisson Zahl μ

Versuch 15 Demonstration der Querkontraktion an einem elastischen Seil

3.2.1.1 Biegung eines Balkens

Bei der Biegung eines Balkens bekommt er annähernd die Gestalt eines Kreisbogens. An seiner Außenseite wird das Material verlängert, an der Innenseite gestaucht: Dazwischen liegt die „Neutrale Faser", deren Länge konstant bleibt. Deren Beschaffenheit trägt offensichtlich nicht zur Festigkeit bei: Man kann das Material in diesem Bereich sogar aushöhlen, ohne daß sich die Biegung wesentlich ändert.

Versuch 16 Die Neutrale Faser wird im polarisierten Licht an einem in der Mitte belasteten, zweiseitig eingespannten Glasbalken gezeigt. Unter Spannung stehende Bereiche drehen die Polarisationsebene. Man erkennt, daß ein Gebiet im Inneren des Balkens, das der „Neutralen Faser", ohne Spannung bleibt.

Das wichtige Ergebnis ist, daß die Biegung von der dritten Potenz der Höhe *a* abhängt. Bei Wahl eines doppelt so hohen Balkens geht die Auslenkung bei gleichbleibender Belastung auf 1/8 zurück. Bei vorgegebener Materialmenge erreicht man mit einem innen hohlen, hohen Profil die geringste Durchbiegung. Das Material im ausgehöhlten Bereich, nahe der neutralen Faser, hätte ohnehin wenig zur Biegesteifigkeit beigetragen.

In der Natur sind die Röhrenknochen in dieser Hinsicht optimiert, die wesentlich zur Leichtbauweise der Vögel beitragen.

Versuch 17 Biegung eines hohlen und eines ausgefüllten Stabes von gleicher Materialmenge. Der Hohlstab ist viel stabiler.

Auslenkung	Art der Lagerung
$\Delta h = \dfrac{4 \cdot F \cdot l^2}{E \cdot b \cdot a^3}$	Einseitig
$\Delta h = \dfrac{F \cdot l^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot a^3}$	Beidseitig
Δh	Durchbiegung
F	Last
a	Höhe
l	Länge
b	Breite
E	Elastizitätsmodul

Tabelle 9 Auslenkung eines Balkens bei Biegung.

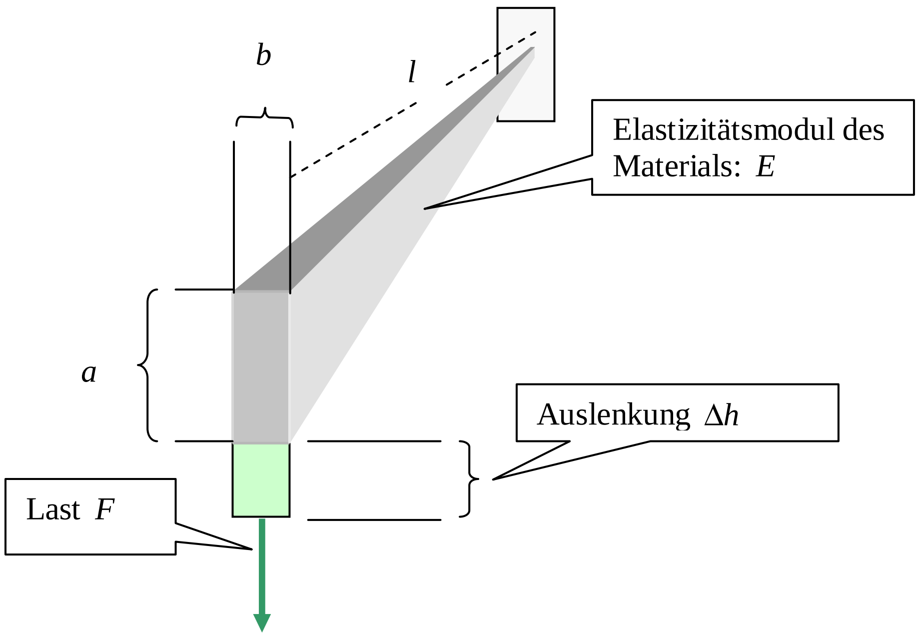

Abbildung 13 Biegung eines einseitig eingespannten Balkens: Die Höhe a geht mit 3. Potenz in die Auslenkung Δh ein.

Versuch 18 Balkenbiegung: Hochkant und quer dazu eingespannt. Hochkant ist die Durchbiegung viel geringer.

3.2.2 Schub- und Torsionselastizität

Ein Körper wird unter der Wirkung einer tangential angreifenden Kraft geschert, er steht unter Schubspannung. Die Maß für die Scherung ist der Scherwinkel α .

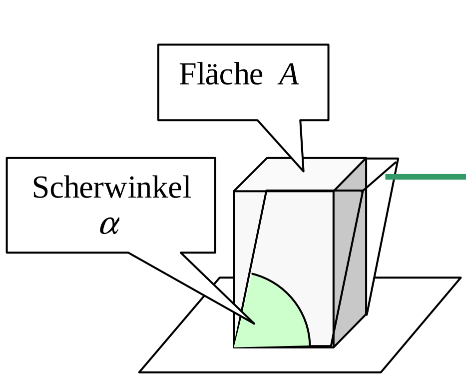

Abbildung 14 Scherspannung an einem quaderförmigen Körper, an dessen oberer Fläche eine Kraft angreift.

Versuch 19 Zellen werden geschert, indem die gleiche Kraft in unterschiedlicher Höhe von der Basis angreift: Gleiche Kraft führt zu gleichem Scherwinkel, trotz unterschiedlichem Drehmoment.

Ein zylinderförmiger Körper wird unter einer tangential angreifenden Kraft auf Torsion oder Drillung beansprucht.

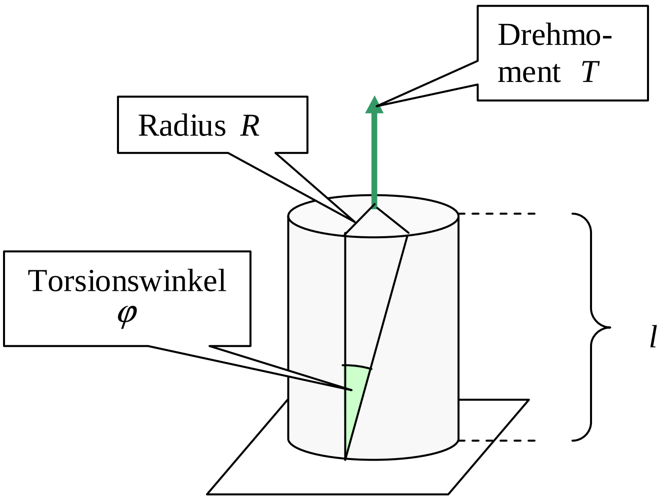

Abbildung 15 Torsion eines zylinderförmigen Körpers, an dessen oberer Fläche ein Drehmoment wirkt.

Für Scherungs- und Torsionswinkel gelten die nachfolgend gezeigten Zusammenhänge zwischen Materialdimensionen und Materialkonstanten, Torsions- oder Scherungsmodul. Bei einem zylindrischen Stab hängt der Torsionswinkel von der vierten Potenz des Radius ab. (Anwendung: Drehstabfederung)

Formel	Einheit	Erläuterung
$\tau = \frac{F}{A}$	$1\ [\mathrm{N/m^2}]$	Schubspannung
Im elastischen Bereich gilt:		
$\tau = G \cdot \alpha$	$1\ [\mathrm{N/m^2}]$	Schubspannung
G	$1\ [\mathrm{N/m^2}]$	Torsionsmodul
α		Neigungswinkel
Für einen zylindrischen Stab mit Radius R gilt:		
$\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l \cdot T}{G \cdot R^4}$		Torsionswinkel
T	$1 \cdot [\mathrm{Nm}]$	Drehmoment

Tabelle 10 Definition von Schubspannung, Scherung- und Torsionsmodul

Versuch 20 Torsion, Hookesches Gesetz

Die physikalischen Vorgänge auf atomarer Ebene sind bei Dehnung, Scherung, Torsion und Querkontraktion die gleichen. Im elastischen Bereich gibt es reversible Änderungen des Abstandes zwischen den Atomen. Im inelastischen Bereich Beginnen irreversible Gefügeänderungen, bei denen sich Versetzungslinien bilden oder verschieben, die Atome ihre Lage verändern bis sie schließlich an der Fließgrenze aufeinander abgleiten. Das erklärt die Verknüpfung zwischen der Poissonschen Zahl, dem Torsions- und dem Dehnungsmodul. Man findet aus geometrischen Überlegungen die folgende Beziehung:

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	Torsionsmodul als Funktion des Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Zahl

3.2.3 Elastische Nachwirkung

In manchen Stoffen stellt sich das Gleichgewicht nach Belastung erst nach einiger Zeit ein oder es bleibt sogar eine Auslenkung bestehen. Wenn das Material erst durch eine entgegengesetzt wirkende Kraft wieder zurückgestellt werden kann, dann zeigt es „*Hysterese*“. Bei elastischer Verformung wird die Energie zur Auslenkung bei der Rückstellung wieder gewonnen. Bei Hysterese ist auch zur vollständigen Rückführung Energie aufzuwenden.

Versuch 21 Demonstration der Hysterese: Elastische Nachwirkung

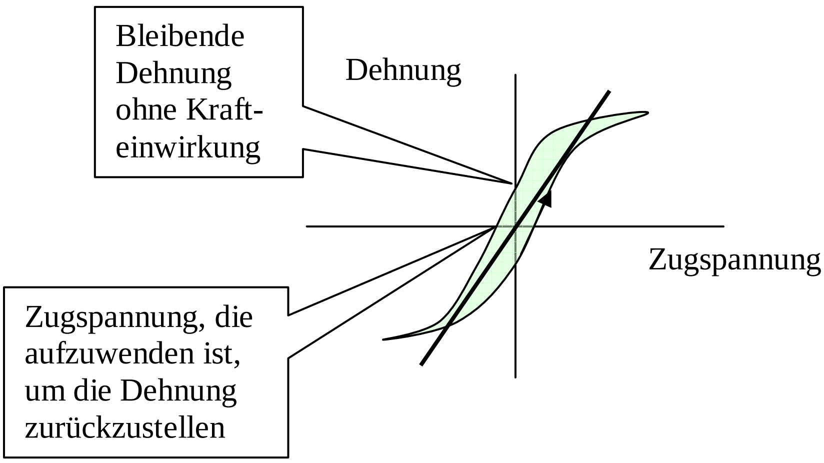

Abbildung 16 Elastisches (stark gezeichnete Gerade) und Hysterese Verhalten. Die Fläche im Bereich der Hysterese Kurve ist ein Maß für die bei einem Zyklus aufgewendete Arbeit. Die Hysterese Kurve beginnt nur bei der ersten Auslenkung im Ursprung.